

Appunti delle

ESERCITAZIONI
DI IDRAULICA
IN LABORATORIO

A.A. 2009/10

Simone Ferrari

1. REGIME LAMINARE E REGIME TURBOLENTO

Il primo esperimento riproduce quello con cui Osborne Reynolds, nel 1883, per primo riconobbe i diversi regimi di movimento dei fluidi: da una vasca contenente acqua parte un tubo di plexiglass, terminante con una valvola per la regolazione del flusso; l'imbocco del tubo è ben raccordato, per accompagnare il più possibile l'ingresso dell'acqua, ed in corrispondenza di esso è posto lo sbocco di un tubicino, dal quale esce del liquido tracciante. Se la valvola è poco aperta, cioè per velocità piccole, il tracciante percorre la tubazione mantenendosi distinto dall'acqua circostante; questo vuol dire che all'interno del tubo il moto avviene in maniera ordinata per traiettorie parallele: il regime è laminare (figura 1a). All'aumentare dell'apertura della valvola, cioè incrementando la velocità, il filetto di tracciante incomincia a fluttuare: il moto è in una situazione di transizione da un regime stabile (laminare) ad uno instabile (figura 1c). Aprendo ulteriormente la valvola, il tracciante scompare a poca distanza dallo sbocco, quindi c'è un forte interscambio di massa tra le varie zone della massa fluida; questo implica che le traiettorie seguite dalle particelle sono fortemente irregolari: il regime è turbolento (figura 1b).

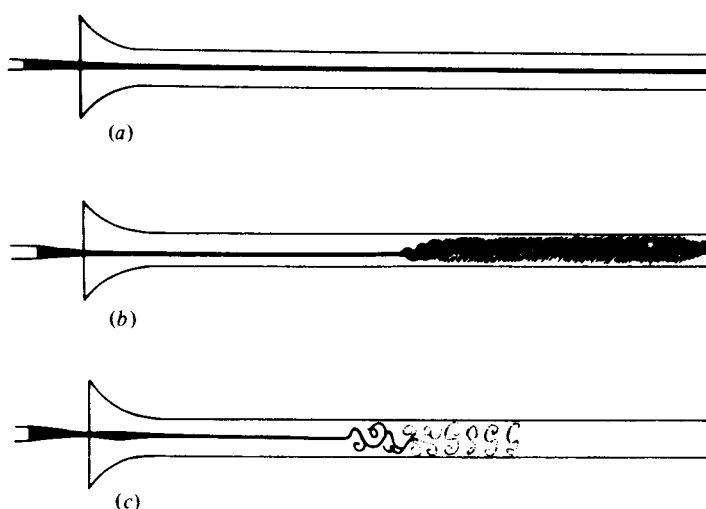


Figura 1: raffigurazione dell'esperienza di Reynolds nel caso di regime laminare (a), turbolento (b) e di transizione(c)

Il parametro fondamentale per descrivere il regime di moto di un fluido è il *numero di Reynolds* $Re = \frac{ul}{\nu}$, in cui u è una opportuna scala delle velocità, l una opportuna scala delle lunghezze e ν la viscosità cinematica: esso rappresenta il rapporto tra le forze d'inerzia (che tendono a generare il moto, secondo la seconda legge della dinamica, $\vec{F}_I = m\vec{a}$, nella quale m la massa e \vec{a} l'accelerazione) e le forze viscosive (che tendono a rallentare ed uniformare il moto, secondo la

legge di Newton sulle forze tangenziali o viscosi $\vec{F}_V = \mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} \Omega$, nella quale μ è la viscosità dinamica, $\frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}}$ la variazione di velocità in direzione normale al moto e Ω la sezione). Risulta,

$$\text{infatti, che } \frac{\vec{F}_I}{\vec{F}_V} = \frac{m\vec{a}}{\mu \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{n}} A} = \frac{\rho L^3 U/T}{\mu U/L^2} = \frac{\rho UL}{\mu} = \frac{UL}{\nu} = Re.$$

Nel caso dell'esperimento in esame, una scelta adeguata delle scale è quella della velocità media nel condotto U e del diametro del condotto stesso D , per cui in questo caso sarà $Re = \frac{UD}{\nu}$.

Durante l'esperimento, D e ν rimangono costanti, per cui l'incremento di U corrisponde ad una crescita di Re : questo implica che il regime laminare è caratterizzato da bassi Re , mentre quello turbolento da alti Re ; in particolare, il Re che caratterizza il passaggio del regime da laminare a turbolento è detto *numero di Reynolds critico* Re_c . Il valore di Re_c dipende dalla particolare configurazione fisica presa in considerazione: nel caso in esame è dell'ordine di 10^3 . Considerando che D è 2 cm, per cui è dell'ordine di 10^{-2} m, e che ν per l'acqua a pressione atmosferica ed alla temperatura di 20°C vale 10^{-6} m²/s, misurando U si può misurare l'ordine di grandezza di Re : nell'apparato sperimentale considerato, è stato misurato che, nel caso di moto laminare, U è dell'ordine del cm/s, cioè di 10^{-2} m/s, e pertanto l'ordine di grandezza di Re è di 10^2 ; mentre nel caso turbolento U è dell'ordine del m/s, per cui Re vale circa 10^4 . Pertanto, poiché il mantenimento di velocità elevate implica un dispendio di energia elevato, il mantenimento di un flusso in regime laminare comporta, a parità delle altre condizioni, un dispendio energetico minore rispetto al mantenimento di un flusso in regime turbolento. Pertanto, il moto del sangue nelle vene e nelle arterie è, in condizioni non patologiche, quasi sempre laminare, per consentire alla pompa che mantiene in circolo il sangue stesso (cioè il cuore) un minore dispendio energetico, un affaticamento minore e, di conseguenze, una vita più lunga. Viceversa, se si desidera una forte miscelazione, come nel caso degli scarichi di fluidi potenzialmente inquinanti in mare, in atmosfera, ecc., ma anche nei miscelatori industriali di vario genere, bisogna assicurarsi che l'energia fornita sia sufficiente ad avere un Re sufficientemente alto per avere un regime turbolento.

Nella tabella riportata nella pagina seguente sono riassunte le principali caratteristiche dei due regimi di moto.

Moto in regime laminare	Regolare nel tempo e nello spazio; prevedibile	Sistema deterministico: variazioni infinitesime delle condizioni iniziali producono variazioni infinitesime nel moto, che è quindi prevedibile	Smorzamento delle perturbazioni	Basso dispendio energetico con assenza di miscelazione
Moto in regime turbolento	Irregolare nel tempo e nello spazio	Sistema caotico: variazioni infinitesime delle condizioni iniziali possono produrre variazioni finite nel moto, che è quindi imprevedibile	Accentuazione delle perturbazioni	Alto dispendio energetico con forte miscelazione

Tabella 1: principali caratteristiche dei regimi di moto laminare e turbolento

2. CORRENTI IN PRESSIONE

L'apparato sperimentale per mezzo del quale si svolge il secondo esperimento è costituito da una tubazione di diametro variabile collegata ad un serbatoio, in cui il livello del pelo libero viene visualizzato tramite un tubo piezometrico; lungo la tubazione sono disposti diversi *tubi di Pitot* che permettono di visualizzare il carico totale H e quello piezometrico h sezione per sezione; la tubazione termina con una valvola che permette di regolare la portata effluente.

Il carico totale H rappresenta l'energia meccanica posseduta dal fluido in movimento per unità di peso e si può dire che sia un modo di misurare l'energia come una quota: infatti, l'energia si misura in $J = Nm = \left(kg \frac{m}{s^2} \right) m$, per cui dividendo per il peso (che si misura in N) si ottiene una

distanza. Il carico totale è dato dalla somma di tre termini: $H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}$, come si può vedere

nella figura seguente, nella quale sono rappresentati i vari termini per una traiettoria passante per i punti A, B e C.

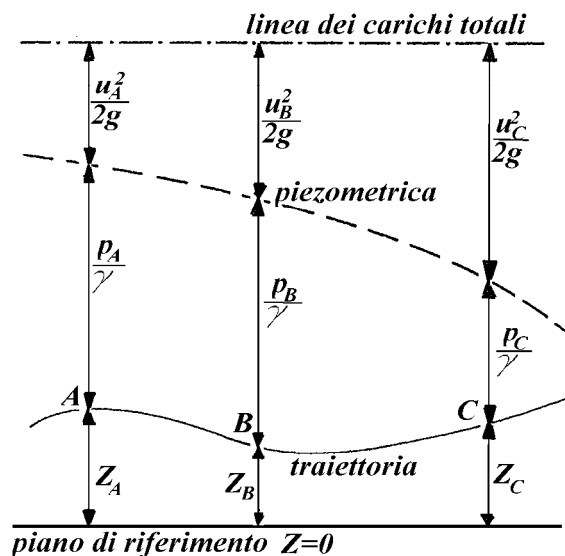


Figura 2: linea dei carichi totali e piezometrica

Il primo termine a secondo membro è la quota geodetica z , che misura la distanza tra un piano arbitrario di riferimento ed il punto in questione; z rappresenta l'energia potenziale, cioè la quota parte di energia potenziale dell'unità di peso del liquido dovuta al fatto che occupa una determinata posizione nel campo gravitazionale. Il secondo termine a secondo membro è l'altezza piezometrica p/γ , che misura la distanza tra il punto in questione ed il livello che si

avrebbe in un piezometro posto in quel punto; essa rappresenta l'energia di pressione, cioè la quota parte di energia potenziale dell'unità di peso del liquido dovuta al fatto che essa è circondata da altre particelle. La somma della quota geodetica e dell'altezza piezometrica è la quota piezometrica h che, dunque, rappresenta l'intera energia potenziale dell'unità di peso del liquido: $h = z + \frac{p}{\gamma}$. L'ultimo termine a secondo membro è l'altezza cinetica $u^2/2g$, che misura la distanza tra il pelo libero e la linea dei carichi totali: essa rappresenta l'energia cinetica dell'unità di peso del liquido. Il luogo delle quote piezometriche è detto *piezometrica*, mentre il luogo dei carichi totali è detto *linea dei carichi totali (lct)*. Le due linee suddette sono convenzionalmente riferite all'asse della tubazione.

Per misurare la velocità in un punto di una corrente fluida si può usare un *tubo di Pitot*. Esso è costituito da un normale piezometro abbinato ad un altro che termina con una curva (figura 3a): una particella in moto dal punto A al punto B, quando giunge in B è costretta a fermarsi poiché incontra il punto mediano del tubo di Pitot ($u_B = 0$). Se pertanto si applica il teorema di Bernoulli tra un punto A, sufficientemente lontano da B perché si possa ritenere il flusso indisturbato, ed il punto B stesso, si ottiene: $z_A + \frac{p_A}{\gamma} + \frac{u_A^2}{2g} = z_B + \frac{p_B}{\gamma}$, da cui, posto $h_B - h_A = \Delta$, si ottiene il valore della velocità in A: $u_A = \sqrt{2g\Delta}$. Nella pratica, i due tubi piezometrici sono incorporati in un unico strumento, come quello illustrato nella figura 3b.

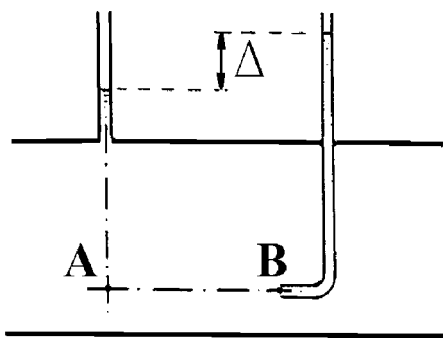


Figura 3a: misura della velocità con due piezometri

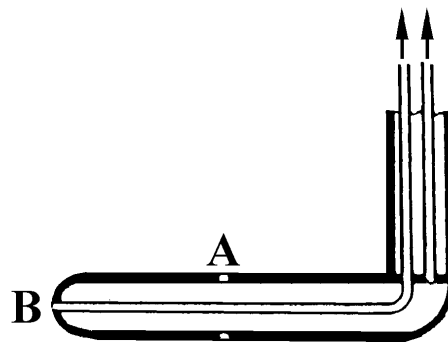


Figura 3b: tubo di Pitot

La misura di velocità con il tubo di Pitot è, dunque, una misura indiretta ottenuta dalla misura di una differenza di pressione; di conseguenza, tanto maggiore sarà questa differenza (cioè tanto maggiore sarà la velocità), tanto più precisa sarà la misura della velocità stessa. Infatti, il tubo di Pitot trova ampio utilizzo come strumento di misura della velocità su mezzi che si muovono a velocità elevate, come le macchine da competizione e gli aerei (figura 4).



Figura 4: esempi di utilizzo del tubo di Pitot per la misura della velocità in una macchina da corsa (a sinistra) e in un aereo a destra)

Ritornando all'apparato sperimentale, si può notare che, quando la valvola è completamente chiusa, la velocità è nulla (caso idrostatico), l'altezza cinetica è nulla, per cui *piezometrica* e *lct* coincidono. Questo implica che l'energia si mantiene costante lungo la tubazione. Aprendo la valvola, si genera all'interno della tubazione una corrente in pressione, cioè un flusso nel quale il contorno bagnato coincide con la superficie interna della tubazione. La *lct* e la *piezometrica* si separano e si inclinano: si separano perché ora il liquido è dotato di una certa velocità, proporzionale all'altezza cinetica (in quanto parte dell'energia potenziale si trasforma in cinetica); si inclinano a causa delle perdite di carico (*pd*), cioè delle perdite di energia che l'unità di peso del liquido subisce nel suo movimento.

Le perdite di carico possono essere distribuite (o continue) e concentrate: quelle continue, determinate dalla dissipazione viscosa dovuta al contatto tra un liquido viscoso e la parete, sono

date da $\int_0^L j ds$, cioè dall'integrale di $j = -\frac{\partial H}{\partial s}$ (j è la cadente, cioè la perdita di carico per unità

lunghezza) lungo il tratto in questione di lunghezza L ; le perdite concentrate, dovute alle zone di ricircolo che si creano in caso di variazioni non graduali di sezione (brusco allargamento o restringimento, imbocco da un serbatoio, ecc.) o di direzione (curve, gomiti, ecc.), sono date da

$\lambda = \eta \frac{U^2}{2g}$, cioè sono proporzionali all'altezza cinetica secondo un coefficiente di proporzionalità

η , dipendente dalle sole caratteristiche geometriche del brusco cambiamento e dal regime di moto, che varia a seconda dei casi.

Per il calcolo della cadente esistono varie formule, teorico-sperimentali o empiriche: quelle

empiriche sono solitamente riconducibili ad una forma monomia del tipo $j = k \frac{Q^\beta}{D^n}$, nella quale

k è un coefficiente che dipende dalla scabrezza della tubazione, Q è la portata, β un coefficiente che dipende dal regime di moto (per moto turbolento $\beta = 2$, per moto laminare o in tubature idraulicamente lisce $\beta < 2$), D il diametro della tubazione ed n un coefficiente solitamente prossimo a 5. Dalla formule appena scritta si può vedere come le *pd* distribuite aumentino al crescere della scabrezza e della velocità, mentre diminuiscano al crescere del diametro.

Nei tratti in cui il moto è uniforme¹, $U = cost$ per cui $j = i$, cioè la pendenza della *lct* coincide con quella della *piezometrica*, data da $i = -\frac{\partial h}{\partial s}$. Se invece il moto non è uniforme, come ad esempio nel caso di cambiamenti di sezione, *lct* ed *piezometrica* possono avvicinarsi, se il flusso rallenta, o allontanarsi, se il flusso accelera, con trasformazione di energia da cinetica a potenziale e viceversa.

Se si considera il moto permanente di un fluido incomprimibile attraverso una condotta cilindrica (cioè un moto uniforme), valgono le seguenti equazioni:

- equazione di conservazione della massa per le correnti: $Q = U\Omega = cost$,
nella quale Q è la portata, U è la velocità media lungo una sezione regolare e Ω l'area della sezione stessa; da questa equazione discende che al diminuire dell'area della sezione aumenta la velocità e viceversa;

- equazione dell'energia per le correnti: $H_1 - H_2 = \left(h_1 + \alpha \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \alpha \frac{U_2^2}{2g} \right) = jL$,

nella quale α è il *coefficiente di Coriolis*, che tiene conto di quanto la velocità media U si discosta dal profilo di velocità (nel caso di moto turbolento, come quello in esame, si può porre $\alpha = 1$); da questa equazione si vede che nel moto uniforme le *pd* sono dovute alla sola dissipazione viscosa (per l'ipotesi di moto uniforme non possono esserci *pd* concentrate).

Nel caso più generale di moto permanente di un fluido incomprimibile attraverso una condotta con cambiamenti di sezione e direzione, vale invece la seguente equazione:

- $\left(h_1 + \alpha \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \alpha \frac{U_2^2}{2g} \right) = \sum_{i=1}^N j_i L_i + \sum_{k=1}^M \eta_k \frac{U_k^2}{2g}$,

nella quale il secondo membro è la somma delle N perdite di carico distribuite lungo N tratti uniformi e delle M perdite di carico concentrate che il flusso incontra tra la sezione 1 e quella 2.

¹ In Idraulica s'intende con moto uniforme un processo nel quale le caratteristiche del moto si mantengono identiche nei successivi punti delle traiettorie, pur potendo essere diverse da una traiettoria all'altra: perché ciò avvenga, le traiettorie devono essere rettilinee; un esempio di moto uniforme è proprio quello stazionario (in cui le caratteristiche del moto si mantengono identiche nel tempo) in una tubazione circolare rettilinea.

Utilizzando l'equazione di continuità per le correnti $Q=U\Omega=cost$ e riportando tutte le costanti sotto un'unica costante K , si ottiene l'equazione caratteristica dell'impianto:

- $H_1 - H_2 = KQ^2$

Come detto, le perdite di carico concentrate sono proporzionali all'altezza cinetica secondo un coefficiente η , variabile a seconda della particolare situazione (brusco allargamento, brusco restringimento, gomito, ecc.). Ad esempio, nel caso di imbocco a raso da un serbatoio, caso

particolare di brusco restringimento, $\Delta H = 0,5 \frac{U^2}{2g}$, in cui U è la velocità nella prima sezione in

cui, dopo la zona di contrazione della vena fluida che si crea a causa del distacco di vena, la vena stessa rioccupa tutto il condotto. Attorno alla zona di contrazione c'è una zona in cui il fluido si muove di moto vorticoso senza partecipare al flusso in ingresso nella tubazione, causando sottrazione di energia al flusso stesso (cioè una perdita di carico). La zona di contrazione nasce perché le traiettorie delle particelle non possono seguire cambiamenti di direzione eccessivamente bruschi. La prima sezione in cui le traiettorie sono parallele e rettilinee si chiama *sezione contratta* (indicata con Ω_c nella figura 5) e lì la corrente può essere considerata gradualmente variata e quindi idrostatica la distribuzione della pressione. Nota la sezione Ω della tubazione, l'area della sezione contratta si può determinare moltiplicando Ω per il *coefficiente di contrazione* C_c (che assume il valore di 0,61). Nel caso invece di imbocco ben raccordato, la vena riesce a seguire la curvatura del condotto, per cui non si crea distacco né ricircolo, e le *pdc* concentrate sono praticamente trascurabili.

Nel caso di *pdc* concentrata per brusco restringimento, cioè quella che si ha nel passaggio da una tubazione di diametro maggiore a una di diametro minore, la velocità da utilizzare nella formula è quella nella condotta più piccola, mentre il coefficiente η è funzione del rapporto tra l'area della sezione minore e quella della sezione maggiore Ω_2/Ω_1 , con valori che vanno da 0 (per $\Omega_2 / \Omega_1 = 1$, cioè quando non c'è restringimento!) a 0,5 (per $\Omega_2 / \Omega_1 = 0$ ricadiamo nel caso di imbocco da serbatoio), passando per circa 0,4 quando $\Omega_2 / \Omega_1 = 0,25$, come nel caso dell'esercitazione.

I tronchi di condotta gradualmente convergenti in pratica non provocano *pdc* concentrate, mentre in quelli divergenti i distacchi di vena non possono praticamente essere evitati (possono però essere estremamente ridotti per angoli minori di 6°-7°).

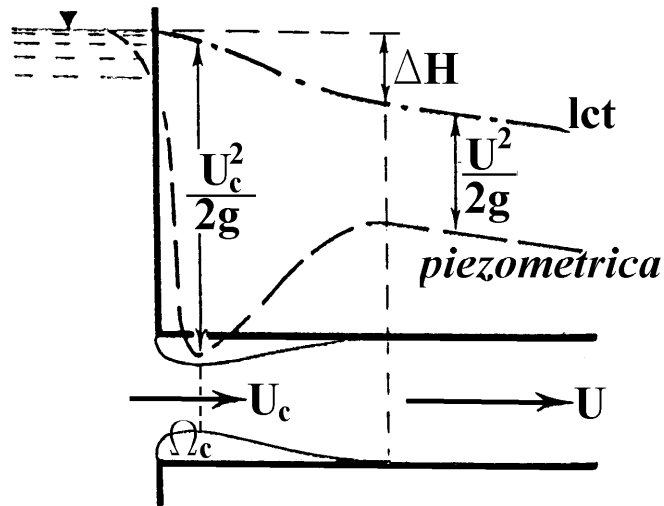


Figura 5: perdita di carico concentrata di imbocco da serbatoio

Nella figura 6 è possibile osservare l'andamento qualitativo della linea dei carichi totali e della piezometrica nell'apparato sperimentale presente in laboratorio.

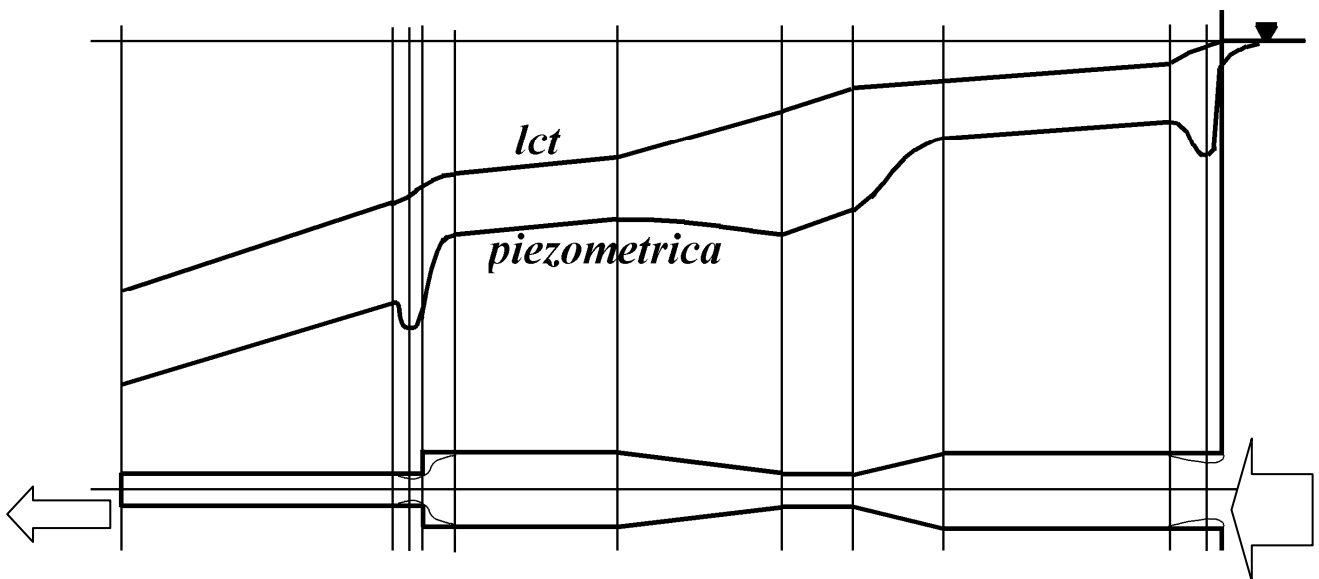


Figura 6: andamento delle linee dei carichi totali e della piezometrica nell'apparato sperimentale

È importante notare che le perdite di carico dipendono dalla velocità, per cui:

- maggiore è la velocità, maggiore è il dispendio energetico (per risparmiare energia bisogna rallentare);
- ogni volta che c'è movimento c'è un dispendio energetico e, di conseguenza, il moto avviene sempre da zone di carico maggiore a zone di carico minore;
- solo in assenza di movimento non c'è dispendio energetico, infatti nel caso idrostatico (velocità nulla) la piezometrica e la linea dei carichi totali coincidono (il termine cinetico è nullo) e l'energia si mantiene costante.

La misura della portata effluente in un condotto, ad esempio di diametro D_A , può essere effettuata tramite un venturimetro, strumento caratterizzato da un tratto convergente, seguito da uno di diametro $D_B < D_A$, che termina con un tratto divergente che permette di ripristinare il diametro iniziale. Sotto le ipotesi che le sezioni A e B siano abbastanza vicine (per poter trascurare le pdc distribuite), che il tratto convergente sia ben raccordato (per poter trascurare le pdc concentrate) e che il moto sia turbolento, si può applicare l'equazione dell'energia per le

correnti tra A e B: $h_A + \frac{U_A^2}{2g} = h_B + \frac{U_B^2}{2g}$; per l'equazione di continuità vale invece la

$Q = \Omega_A U_A = \Omega_B U_B$. Combinando queste due equazioni ed osservando che $h_A - h_B = \delta$ (figura 7), si arriva a scrivere l'equazione che consente di calcolare la portata fluente nel condotto²:

$$Q = \frac{\Omega_A}{\sqrt{\Omega_A^2/\Omega_B^2 - 1}} \sqrt{2g\delta} = \frac{\Omega_A}{\sqrt{\Omega_A^2/\Omega_B^2 - 1}} \sqrt{2g \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \Delta};$$

solitamente però per i venturimetri commerciali si utilizza una forma del tipo $Q = K\sqrt{\delta}$ (o $Q = K\sqrt{\Delta}$ nel caso il venturimetro sia dotato di manometro differenziale), nella quale il coefficiente K , determinato dalla ditta costruttrice, riassume in sé tutti gli altri termini.

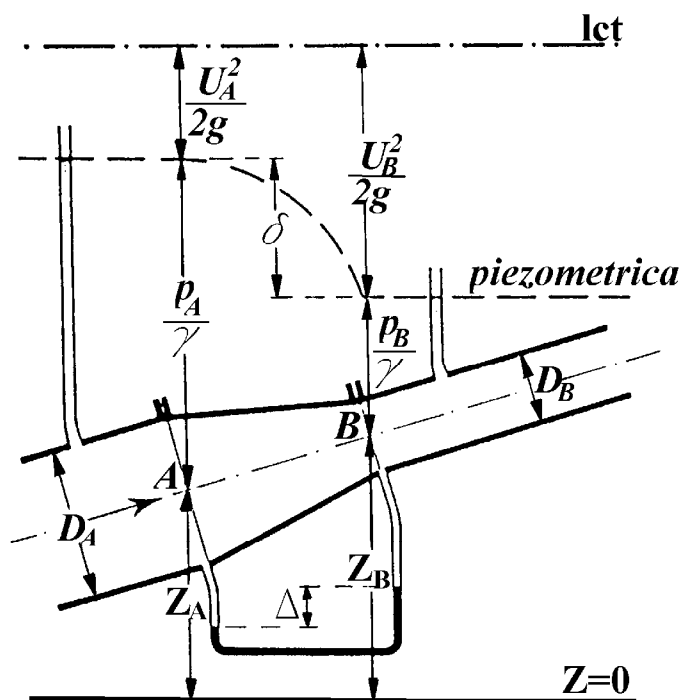


Figura 7: misura della portata con un venturimetro

Esempi di applicazioni di interesse ingegneristico delle correnti in pressione sono gli acquedotti, gli oleodotti, gli impianti antincendio, gli impianti di riscaldamento e condizionamento, gli

² Nell'ultimo passaggio si è utilizzata l'equazione del manometro differenziale $\delta = \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \Delta$.

impianti di trasporto di fluidi nelle industrie, gli impianti di irrigazione, i circuiti idraulici, di alimentazione e di raffreddamento dei motori, ecc.

3. POMPE

Le pompe sono macchine idrauliche che, ricevendo energia meccanica da un motore, la trasmettono, nella misura consentita dal rendimento η del gruppo pompa-motore, al liquido che le attraversa, consentendo di sollevare quantitativi di fluido da un livello inferiore ad uno superiore, facendogli vincere un certo dislivello e conferendo all'acqua una spinta. L'energia è fornita al fluido sotto forma di prevalenza ΔH , cioè come energia potenziale. Considerando che la potenza ceduta al fluido per unità di peso $\gamma Q \Delta H$ è sempre inferiore a quella assorbita W secondo il rendimento η , si può ottenere la Curva caratteristica della pompa:

- $$W = \frac{\gamma Q \Delta H}{\eta}$$

che rappresenta, in un piano cartesiano portata-prevalenza, una curva decrescente (a parità di potenza, valori alti di portata corrispondono a basse prevalenze e viceversa).

Chiamando H_{geod} la differenza di carico da vincere, l'equazione caratteristica dell'impianto vista nel paragrafo precedente diventa:

- $$\Delta H = H_{geod} + kQ^2$$

che rappresenta, in un piano cartesiano portata-prevalenza, una parabola ascendente traslata verso l'alto di H_{geod} . L'intersezione delle due curve fornisce il punto di funzionamento o punto di lavoro ($\Delta H_0, Q_0$) di una determinata pompa in un determinato impianto (figura 8).

Le pompe di più largo uso in campo ingegneristico sono le pompe centrifughe. Una pompa centrifuga (figura 9) è composta essenzialmente da una parte rotante detta girante e da una parte fissa, o corpo di pompa, entro cui si muove l'acqua convogliata dalla forza centrifuga impressa dalla girante. L'acqua entra nel corpo di pompa attraverso il tubo di aspirazione e viene inviata, attraverso il movimento della girante, nel tubo di mandata. Il tubo di aspirazione è assiale rispetto alla girante, il tubo di mandata è radiale. Il movimento della girante determina una depressione nel tubo di aspirazione e l'acqua, spinta dalla pressione atmosferica, risale lungo il tubo e viene proiettata dalla girante sul corpo della pompa dal quale esce attraverso il tubo di mandata.

In figura 10 si riporta un esempio di foglio tecnico, con le curve caratteristiche dei vari modelli di una determinata pompa con potenze assorbite diverse, utilizzabile per la scelta della pompa più adatta ad un certo tipo di impianto.

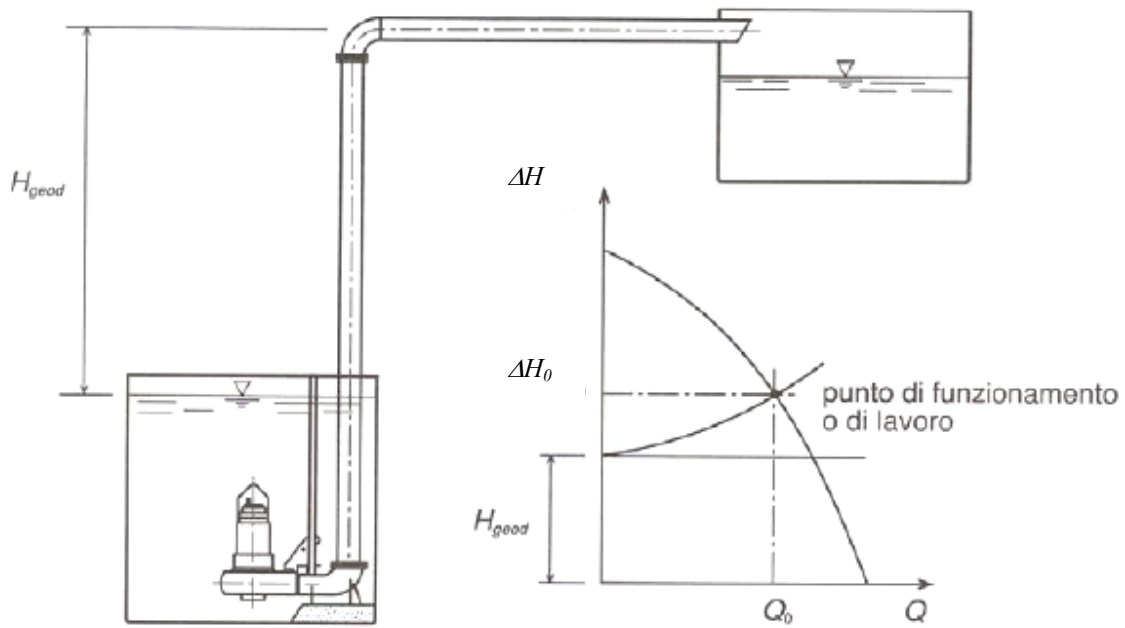


Figura 8: schema di impianto di sollevamento con calcolo del punto di funzionamento attraverso l'intersezione della curva caratteristica della pompa e della curva caratteristica dell'impianto.

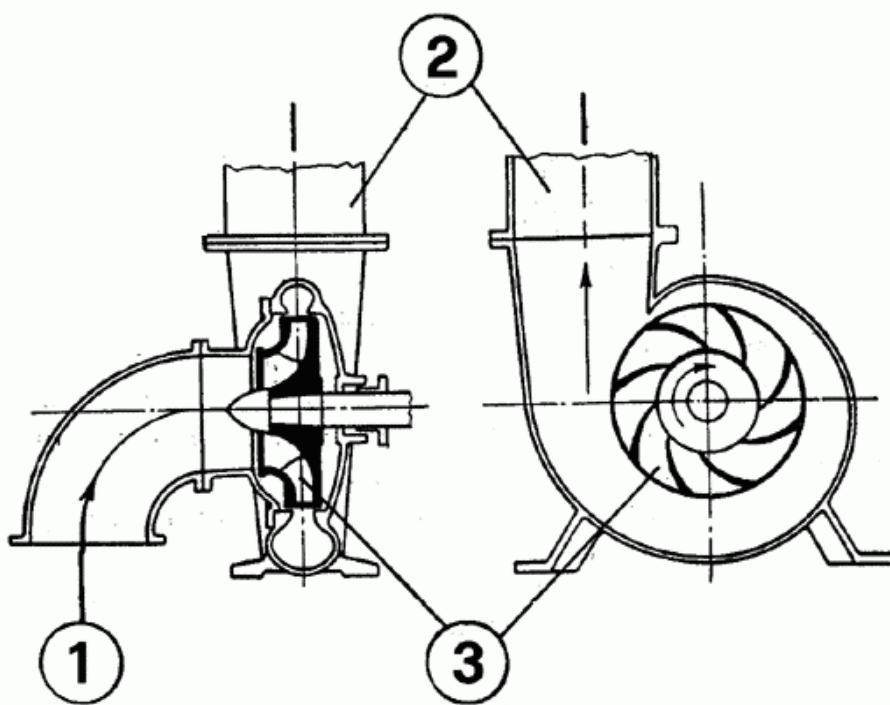


Figura 9: Rappresentazione schematica di una pompa centrifuga: (1) tubo di aspirazione; (2) tubo di mandata; (3) girante

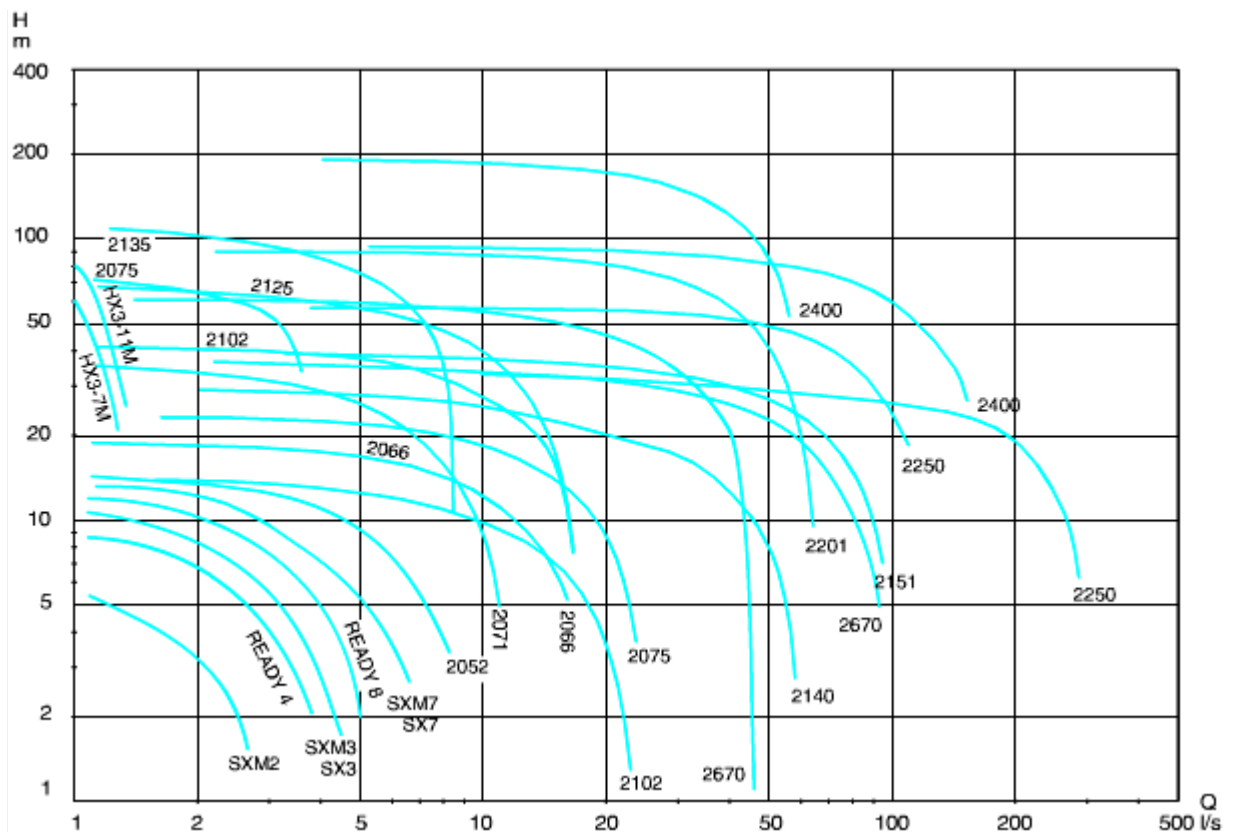


Figura 10: foglio tecnico con le curve caratteristiche dei vari modelli di una determinata pompa con potenze assorbite diverse.

4. CORRENTI A PELO LIBERO

Il principale componente del terzo apparato sperimentale è un canale basculante, del quale cioè si può variare l'inclinazione, lungo 8 m e con sezione rettangolare di larghezza $b = 40$ cm ed altezza massima $Y_{max} = 50$ cm, dotato di due paratoie: una a battente posta all'incirca al centro del canale, ed una sollevabile che può essere utilizzata sia come stramazzo che come paratoia a battente, posta alla fine del canale. Il canale è alimentato da un serbatoio che a sua volta viene riempito da una serie di pompe, poste sotto il pavimento; un secondo serbatoio, che serve sia da vasca di aspirazione per le pompe sia da vasca di scarico per il canale, chiude questo circuito idraulico. La portata che transita può essere misurata mediante un venturimetro, il cui funzionamento è stato illustrato nella precedente esperienza.

Nelle correnti a pelo libero l'inclinazione del fondo è solitamente ridotta, per cui è possibile considerare le sezioni verticali come sezioni regolari: ciò implica che l'altezza piezometrica h coincide con la quota del pelo libero Y . Solitamente il carico viene quindi riferito alla quota del fondo del canale z_F , e prende il nome di *carico specifico* $E = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$ ³, nella quale Y è la profondità della corrente. Fissata la portata Q , è possibile mettere in grafico l'andamento di E rispetto a Y (figura 11).

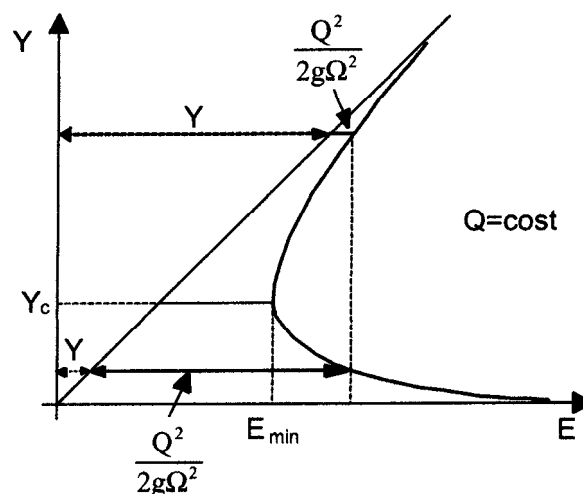


Figura 11: andamento del carico specifico a portata costante

³ $E = H - z_F = \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g}\right) - z_F = h - z_F + \frac{u^2}{2g} = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}$

Si può vedere che esiste un minimo di energia con la quale la fissata Q può transitare: tale minimo si ha in corrispondenza dell'*altezza critica* Y_C . In corrispondenza delle condizioni

critiche risulta che $\left(\frac{\Omega^3}{b}\right)_C = \frac{Q^2}{g}$ che, nel caso di alveo rettangolare (per cui $\Omega = Y \cdot b$), diventa

$Y_C = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}}$. Se invece si fissa E , si ottiene $Q = \Omega \sqrt{2g(E - Y)}$, il cui andamento è rappresentato

nella figura seguente:

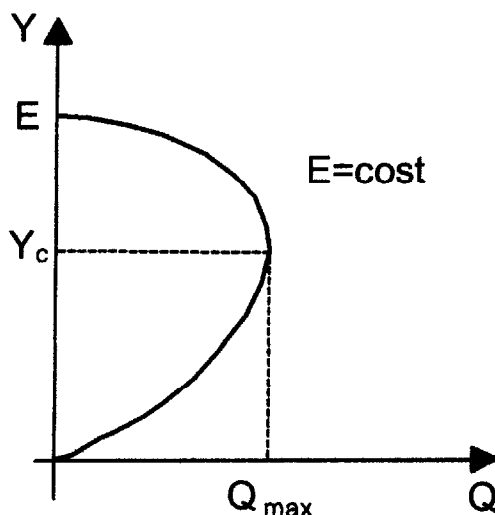


Figura 12: andamento della portata a carico specifico costante

In questo caso in condizioni critiche vale la $Y_C + \frac{(Y_M)_C}{2} = E$ (con Y_M la profondità media) che,

per alveo rettangolare, si semplifica nella $Y_C = \frac{2}{3} E$.

Un concetto importante nello studio delle correnti a pelo libero è quello di celerità c , termine col quale si indica la velocità di propagazione di una perturbazione (a rigore, infinitesima); è importante notare che la celerità non comporta trasporto di materia. Un esempio di perturbazione a tutti nota è l'onda circolare che si genera gettando un sasso in un lago (figura 13a, in cui sono segnate le posizioni raggiunte dal fronte d'onda dopo 1, 2 e 3 intervalli di tempo per una certa c).

La celerità relativa è data dalla $c = \pm \sqrt{gY_M}$, mentre la celerità assoluta è data dalla $a = U \pm \sqrt{gY_M} = U \pm c$, nella quale U è la velocità con cui si muove il fluido. Nel caso di corrente lenta $U < c$ quindi le informazioni sulla causa di perturbazione possono risalire la corrente (figura 13b), "avvertirla" e permetterle così di prepararsi ad affrontare la causa perturbatrice: una corrente lenta è quindi influenzabile da valle e, per questo motivo, *i profili di*

corrente lenta si tracciano da valle verso monte. Nel caso di corrente veloce, invece, $U > c$, per cui le perturbazioni generate in un certo punto non possono risalire la corrente: una corrente veloce non è pertanto influenzabile da valle ed i suoi profili vanno tracciati da monte verso valle. In questo caso le perturbazioni generano i caratteristici fronti d'onda rettilinei, che altro non sono che l'involuppo delle successive posizioni assunte dalla perturbazione circolare che viene trascinata a valle dalla corrente veloce (figura 13c); i fronti d'onda rettilinei formano con la direzione della corrente un angolo $\alpha = \arcsen \frac{c}{U}$.

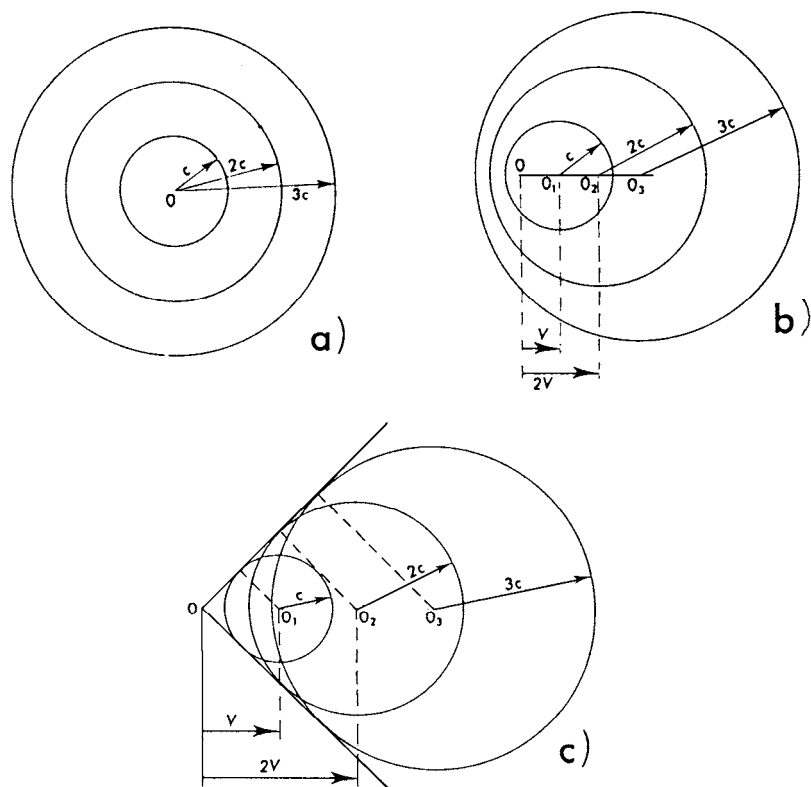


Figura 13: propagazione di un'onda circolare nel caso statico(a), di corrente lenta (b) e di corrente veloce(c)

Il rapporto tra la velocità di trasporto della corrente e la celerità delle piccole perturbazioni è

detto *numero di Froude*: $Fr = \sqrt{\frac{U^2}{gY_m}}$; si può pertanto affermare che se $Fr > 1$ la corrente è

veloce, mentre se $Fr < 1$ la corrente è lenta.

Un'altra importante nozione è quella di *altezza di moto uniforme* Y_U , ottenibile dalla relazione di Chézy $U = \chi \sqrt{R_j i_F}$ nel caso sia nota la portata e le caratteristiche geometriche del canale; nella relazione compare la pendenza del fondo i_F al posto della cadente j perché in condizioni di moto uniforme queste due grandezze coincidono. Dall'equazione di Chézy, sostituendo l'espressione

della velocità critica $U_c = \frac{Q_c}{\Omega_c}$, è possibile calcolare la *pendenza critica* $i_c = \frac{g\Omega}{\chi^2 b R_1}$, che è quella per cui il moto uniforme avviene in condizioni critiche; se $i_f > i_c$ si parla di alveo a forte pendenza ($Y_u < Y_c$); viceversa, se $i_f < i_c$ si parla di alveo a debole pendenza ($Y_u > Y_c$). Si noti che la pendenza critica dipende dalla portata che transita nel canale e non è, pertanto, un dato intrinseco del canale stesso.

Nel caso che la corrente non sia in moto uniforme, per determinare l'andamento del profilo della corrente si utilizza l'equazione differenziale del pelo libero per correnti gradualmente variate nel

caso di portata costante:
$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{j}{i_f}}{\frac{dE}{dY}} = i_f \frac{1 - \frac{j}{i_f}}{1 - Fr^2}.$$

Dallo studio di questa equazione si possono determinare i cosiddetti *profili di corrente*, riportati nella figura seguente:

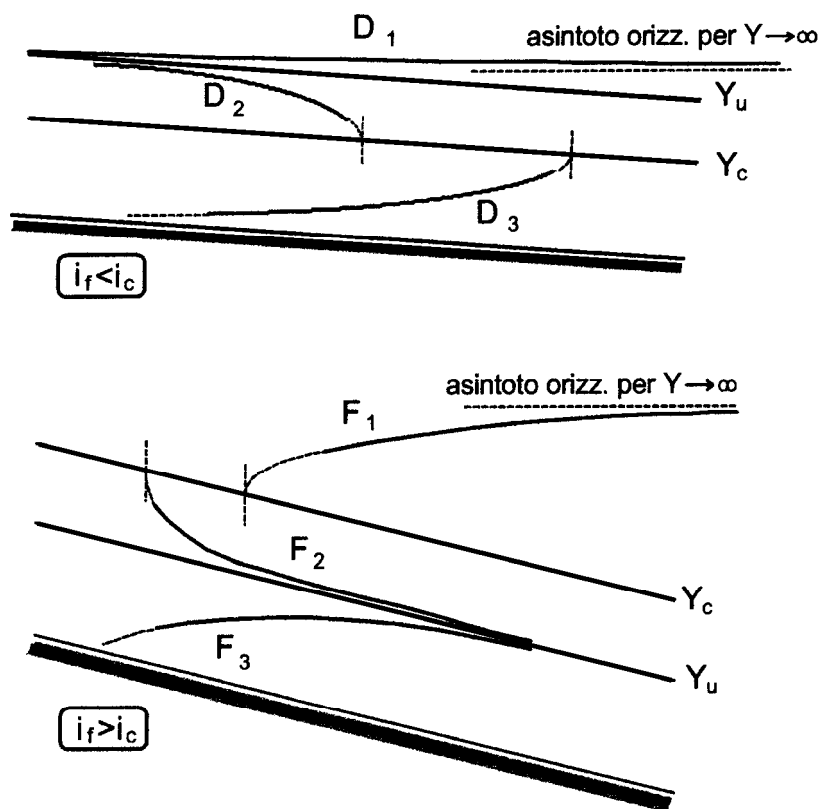


Figura 14: profili di corrente

Poiché questi profili sono stati tracciati a portata costante, risulta che, se il profilo si abbassa nel senso del moto, la corrente è accelerata, se si alza, la corrente è rallentata.

Introdotti questi concetti, si può osservare cosa succede nel canale cilindrico privo di ostacoli quando la pendenza è debole: si stabilisce un profilo di tipo D2, di corrente lenta accelerata, che passa per l'altezza critica quando, alla fine del canale, avviene il salto di fondo (figura 15).

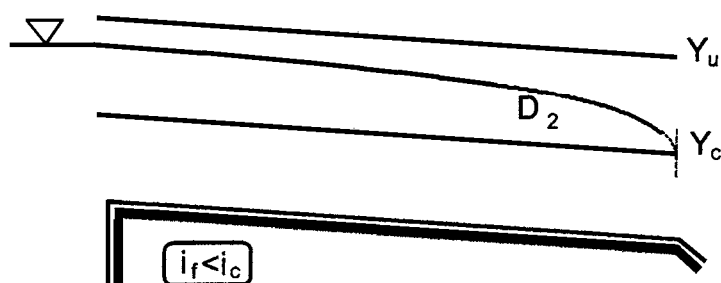


Figura 15: andamento del profilo nel canale a debole pendenza privo di ostacoli

Il profilo può pertanto essere tracciato da valle verso monte partendo dalla condizione al contorno di valle che è appunto l'altezza critica, calcolabile perché sono note la portata e la larghezza dell'alveo. Va sottolineato il fatto che si crea un profilo di richiamo, proprio perché in corrente lenta l'informazione sulla presenza del salto di fondo può risalire verso monte. Inoltre, si può vedere come il passaggio da corrente lenta a corrente veloce (il salto di fondo può essere interpretato come un canale a pendenza infinita) avvenga attraverso il passaggio per lo stato critico.

Nel caso di alveo senza ostacoli a forte pendenza si stabilisce un profilo di tipo F2, di corrente veloce accelerata; il profilo tenderebbe al moto uniforme all'infinito ma, poiché il canale non è indefinito ma termina con il salto di fondo, tale altezza non viene raggiunta; inoltre, come visto, in corrente veloce l'informazione sulla presenza del salto di fondo non può risalire, per cui non vi è richiamo ed il profilo "casca ignaro". Il tracciamento di questo profilo va fatto da monte verso valle partendo dalla sezione iniziale del canale in cui si ha l'altezza critica, cioè la condizione di minima energia specifica per convogliare la portata immessa nel canale.

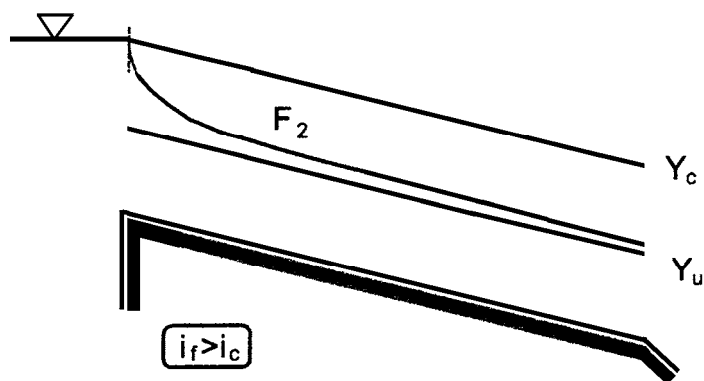


Figura 16: andamento del profilo nel canale a forte pendenza privo di ostacoli

Prima di introdurre ostacoli nel canale, va detto che il passaggio da corrente veloce a corrente lenta non può avvenire in modo continuo (come quello da lenta a veloce) sempre per il fatto che in corrente veloce l'informazione sulla presenza a valle di una corrente più lenta non può risalire: la transizione avviene allora in modo improvviso e fortemente dissipativo attraverso il cosiddetto *risalto idraulico*, che può essere considerato come un'onda stazionaria, che si sposta verso monte con la stessa velocità della corrente di valle e che, frangendo continuamente, non contribuisce alla portata sottraendo energia al moto. Spesso pertanto viene provocato un risalto prima di una struttura da proteggere, allo scopo di diminuire l'azione erosiva della corrente sulla struttura stessa riducendo la sua energia. Definita la *spinta totale* $S = \gamma \zeta_G \Omega + \rho \frac{Q^2}{\Omega}$, si può vedere dalla figura seguente che con la stessa spinta possono esistere due altezze, dette coniugate: il risalto avviene nel punto in cui la spinta di valle e di monte si equivalgono.

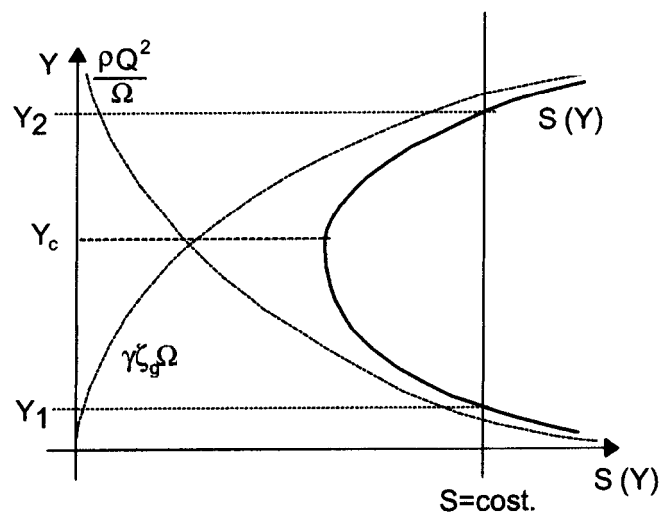


Figura 17: andamento della spinta totale



Figura 18: un risalto idraulico con passaggio da corrente veloce (a sinistra) a corrente lenta (a destra)

Si può ora passare ad analizzare cosa succede introducendo nel canale cilindrico a debole pendenza una paratoia piana: se il canale fosse indefinito, si stabilirebbe un profilo D1 a monte della paratoia, D3 a valle della stessa, seguito da un risalto per ricostituire la condizione di corrente lenta uniforme

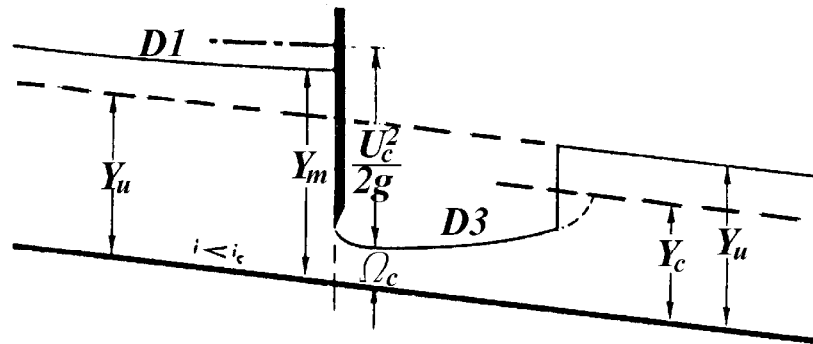


Figura 19: andamento del profilo in un canale cilindrico a debole pendenza, indefinito a valle e a monte, quando viene introdotta una paratoia piana

Il canale nel quale si svolgono le esercitazioni non è però indefinito, ma parte da un serbatoio e termina con un salto di fondo, per cui dopo il risalto si stabilirà un profilo D2⁴.

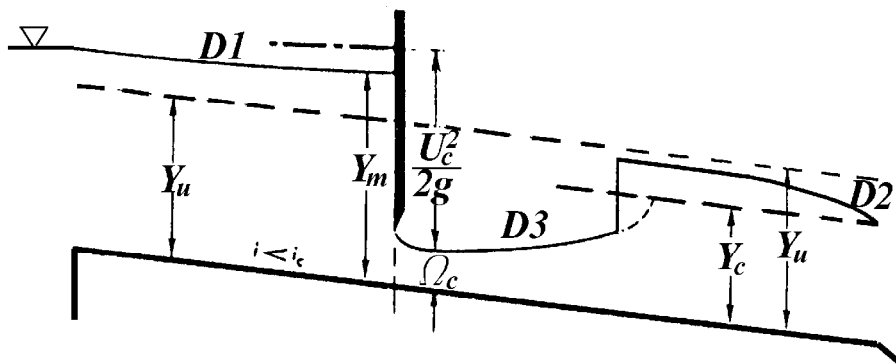


Figura 20: andamento del profilo in un canale cilindrico a debole pendenza, che parte da un serbatoio e termina con un salto di fondo, quando viene introdotta una paratoia piana

A causa della presenza della paratoia, la corrente è costretta a passare per una luce rettangolare di area Ω nota, alla quale segue una sezione contratta di area $\Omega_c = C_c \Omega$, nella quale si può ritenere che il moto sia unidimensionale. Poiché è nota la portata che fluisce nel canale, si può calcolare la velocità della corrente nella sezione contratta $U_c = Q / (C_c \Omega)$ e ricavare di conseguenza E_c . Poiché il processo è poco dissipativo, si può ammettere che la corrente abbia nella sezione

⁴ Come si vedrà meglio nel seguito, la posizione del risalto può essere variata anche variando la spinta di monte o di valle attraverso la variazione dell'altezza delle paratoie.

contratta la stessa energia specifica E_c di cui dispone a monte della paratoia (E_m). Pertanto si può ricavare Y_m dalla curva $E = E(Y)$, curva nella quale, come detto, ad ogni valore di energia specifica corrispondono due Y , una di corrente lenta (in questo caso Y_m) e una di corrente veloce (Y_{con}). Si noti che con Y_m si fa riferimento ad una sezione non immediatamente adiacente alla paratoia ma leggermente a monte di questa, in quanto la sezione adiacente non è di corrente unidimensionale perché la distribuzione delle pressioni non è idrostatica, come si può vedere in laboratorio dai piezometri installati nella paratoia stessa. Nota la Y_m si può ricostruire il profilo di corrente lenta ritardata D1 da valle verso monte utilizzando un metodo alle differenze finite⁵; calcolata la Y_{con} potrà essere determinato il profilo di corrente veloce ritardata verso valle D3. Partendo invece dalla condizione di valle (come ricordato in precedenza, nell'ultima sezione del canale si stabilisce l'altezza critica) si può tracciare verso monte il profilo di corrente lenta accelerata D2. Il punto nel quale la spinta totale della corrente lenta e quella della corrente veloce si eguagliano è, come noto, il punto teorico di formazione del risalto. Sollevando però la paratoia a valle del canale si può imporre una condizione al contorno di valle, cioè l'altezza della corrente nell'ultima sezione del canale (che sarà tanto maggiore quanto più viene sollevata la paratoia). Infatti la paratoia può essere considerata a tutti gli effetti uno stramazzo Bazin, pertanto l'altezza sullo stramazzo è calcolabile semplicemente applicando l'equazione di Bernoulli tra lo stramazzo e una sezione poco più a monte (in modo che possano essere trascurate le perdite). Nota così la condizione al contorno di valle potrà ancora essere ricostruito il profilo D2 e quindi individuata la nuova sezione del risalto. E' importante notare è che sollevando la paratoia si impone una maggiore altezza di valle e quindi si incrementa in sostanza la spinta totale di valle, per cui il risalto risale il canale e si può arrivare fino alla condizione limite di risalto annesso o rigurgitato. Questo avviene quando il profilo D3 scompare del tutto, a questo punto il livello a monte della paratoia non dipende più solo dall'apertura della paratoia (oltre che dalla portata) ma anche dal livello che si viene a stabilire a valle a ridosso di essa.

Nel caso in cui la paratoia venga inserita in un canale a forte pendenza ed indefinito, si avrà, a monte della paratoia, il passaggio dall'altezza di moto uniforme ad un profilo F1 attraverso un risalto, mentre a valle si avrà un profilo F3, che tenderà all'altezza di moto uniforme.

⁵ Allo scopo di tracciare per via analitica il profilo (il cui andamento qualitativo è comunque noto), si opera una discretizzazione dell'equazione differenziale del profilo. In pratica, si divide la differenza di profondità tra il punto iniziale e quello finale del profilo in un numero finito di parti (non necessariamente uguali, ma cercando di utilizzare un numero di punti maggiore nelle zone di maggiore curvatura); si calcolano per ciascuna delle Y estreme le corrispondenti E e quindi le ΔE per ogni intervallo, partendo dall'intervallo più vicino alla causa perturbatrice; nota i_f , si calcola la cadente j con la formula di Chezy, adottando le grandezze medie nell'intervallo; a questo punto, dalla $\Delta s = \frac{\Delta E}{i_f - j}$ si possono calcolare le lunghezze dei tratti di canale lungo i quali le profondità variano dei prefissati ΔY .

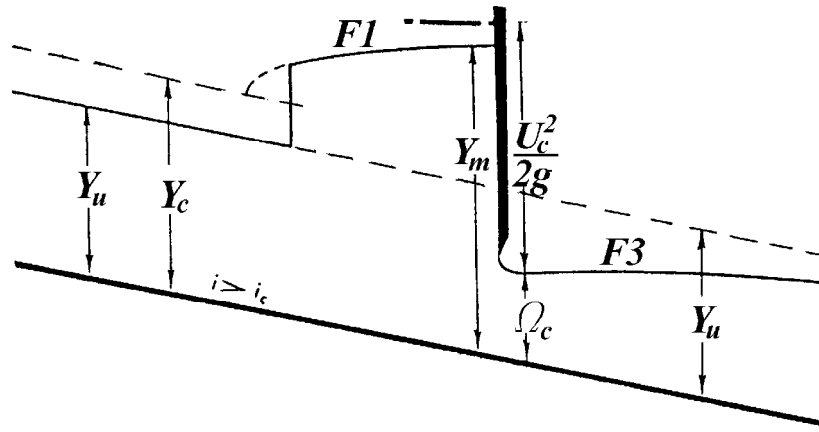


Figura 21: andamento del profilo in un canale cilindrico a forte pendenza, indefinito a valle e a monte, quando viene introdotta una paratoia piana

In realtà, poiché come ricordato il canale non è indefinito, si stabilirà nel tratto di monte un profilo F2 seguito da un risalto che consente la formazione del profilo F1; il risalto si formerà dove il profilo coniugato di F1 interseca il profilo di monte F2.

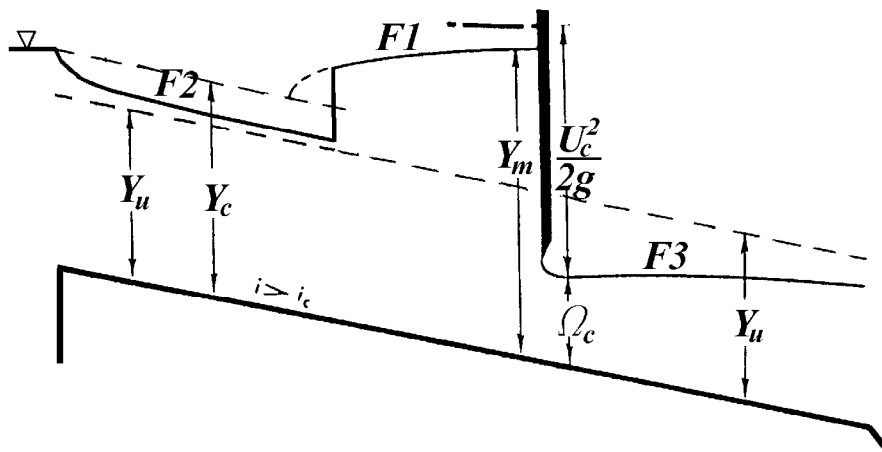


Figura 22: andamento del profilo in un canale cilindrico a forte pendenza, che parte da un serbatoio e termina con un salto di fondo, quando viene introdotta una paratoia piana

Le considerazioni da fare sono analoghe al caso corrispondente in alveo a debole pendenza: la paratoia dà luogo a una sezione contratta di altezza Y_{con} a valle, mentre a ridosso di essa a monte si stabilisce un'altezza Y_m determinabile con lo stesso procedimento usato in precedenza. Quindi a valle della paratoia si può disegnare, da monte verso valle, il profilo di corrente veloce ritardata F3. Nota Y_c si può ricostruire verso valle il profilo di corrente veloce accelerata F2; infine, nota la

Y_m , si può tracciare il profilo di corrente lenta ritardata F1 verso monte⁶, che ha luogo fino al risalto.

Si noti infine che la misura della portata effluente nel canale può essere effettuata anche con lo stramazzo in parete sottile di Bazin (figura 23) presente all'estremità di valle del canale,

utilizzando la formula $Q = \frac{2}{3} c_Q h^{3/2} \sqrt{2g}$, nella quale c_Q è il coefficiente riduttore di portata e h il

carico sullo stramazzo, da misurare in un tratto in cui il canale può ritenersi indisturbato.

Esempi di applicazioni di interesse ingegneristico delle correnti a pelo libero sono le opere di protezione fluviale da esondazioni, gli argini, i canali artificiali, le canalette di irrigazione, ecc.

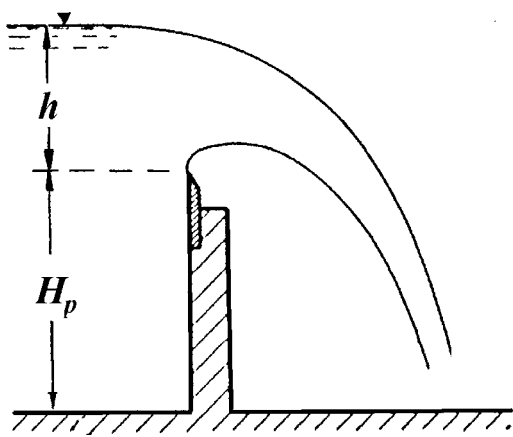


Figura 23: a sinistra, schema di stramazzo in parete sottile, a destra, sua realizzazione in laboratorio

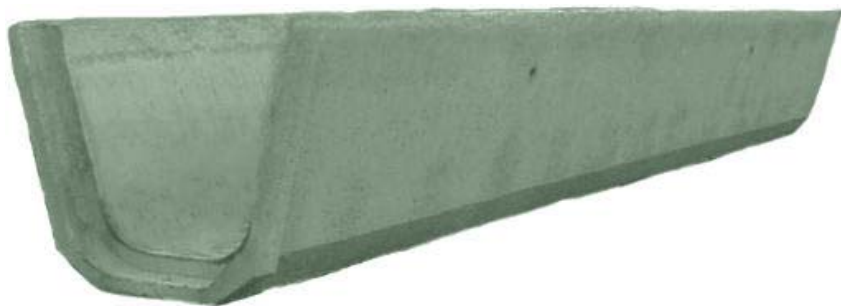


Figura 24: esempio di canaletta prefabbricata per il trasporto a pelo libero dell'acqua per l'irrigazione

⁶ Si noti che è necessario che la corrente rallenti per procurare l'incremento di energia specifica necessario a vincere le maggiori resistenze che la corrente incontra a valle: infatti l'introduzione della paratoia costringe il moto a svolgersi sotto l'altezza di moto uniforme, quindi con maggiore velocità rispetto alla condizione indisturbata e di conseguenza con maggiori perdite di carico.