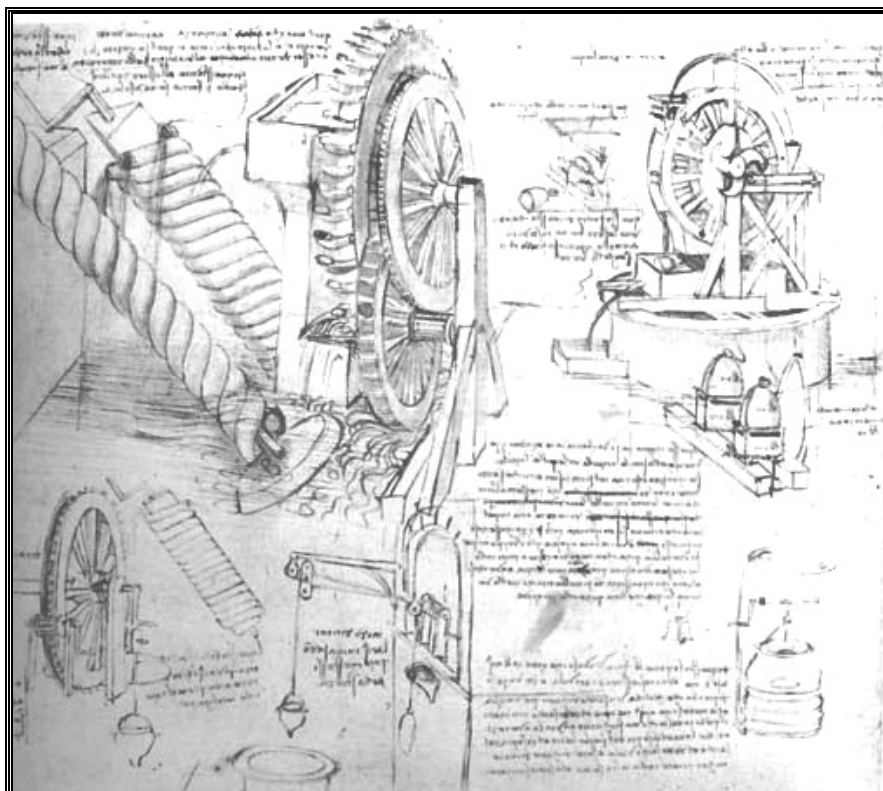


Giorgio Querzoli

Dispense di **IDRAULICA** per gli studenti del nuovo ordinamento



Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Ingegneria del Territorio

*“La scienza è il capitano e la pratica i suoi
soldati”*

Leonardo da Vinci
da: *L'uomo e la natura*, Feltrinelli.

INTRODUZIONE

L'acqua è infra li quattro elementi il secondo men grave, e di seconda volubilità; questa non ha mai quiete insinocché si congiungie al suo marittimo elemento dove, non essendo molestata dai venti, si stabilisce e riposa con la sua superficie equidistante dal centro del mondo.*

Possiamo definire l'Idraulica come quella disciplina che studia il comportamento dei fluidi debolmente comprimibili. Si tratta, in effetti, di una vasta classe di fenomeni che hanno una notevole rilevanza applicativa nei settori più diversi dell'ingegneria. In questa sede, ci limiteremo però a descrivere la meccanica dei fluidi in tutti quei fenomeni nei quali la comprimibilità del fluido, sia esso un liquido od un gas, non gioca nessun ruolo significativo. Potremo quindi ipotizzare, nella nostra trattazione, che i fluidi in gioco siano incomprimibili.

In queste pagine saranno forniti gli strumenti per la descrizione della meccanica di questo tipo di fluidi, si poserà poi l'attenzione sui problemi relativi ad i fluidi in quiete e su di una classe di flussi che hanno particolare rilievo applicativo: le correnti. Si tratta di flussi che si svolgono secondo una direzione preferenziale, nei quali la dimensione trasversale è molto inferiore allo sviluppo longitudinale. Essi si prestano quindi ad una trattazione monodimensionale, nella quale lo stato del fluido in una sezione della corrente è rappresentato in modo integrale con un solo valore per ogni grandezza fisica (velocità, pressione, ecc.); in questo modo tali grandezze vengono ad essere funzione della sola ascissa curvilinea misurata lungo lo sviluppo longitudinale della corrente. Questo tipo di trattazione ben si adatta allo studio di fenomeni come il moto dell'acqua all'interno di condotte, o quello dell'aria all'interno di un impianto di climatizzazione o, ancora, al moto dell'acqua nell'alveo di un fiume o di un canale artificiale.

Nell'intraprendere questo percorso, il primo passo da compiere è chiarire con esattezza cosa si intende per fluido.

Per mettere in evidenza quali siano le caratteristiche peculiari dei fluidi immaginiamo di fare un esperimento: consideriamo due lastre piane parallele, poste ad una certa distanza tra loro (Figura 1). La lastra inferiore è fissata mentre quella superiore è in grado di scorrere rispetto all'altra. Proviamo inizialmente a riempire lo spazio compreso tra di esse con della gomma e, all'inizio dell'esperimento, applichiamo alla lastra superiore una forza F^\dagger . Osserveremo che la lastra superiore inizia a muoversi, prima rapidamente, poi sempre più lentamente fino a fermarsi. Quindi il materiale inizia a deformarsi, e tale deformazione inizialmente aumenta velocemente ma, dopo un certo intervallo di tempo, rimane pressoché costante sicché, al tendere del tempo all'infinito, tende ad assumere una configurazione di equilibrio come rappresentato nella Figura 1(d, e, f). In particolare la Figura 1d rappresenta la configurazione iniziale, e le Figure 0e ed 0f rappresentano la configurazione in due istanti successivi all'applicazione della forza.

* Questa, come tutte le altre, nei capitoli seguenti, da: Leonardo, L'uomo e la natura, a cura di M. De Micheli Feltrinelli, 1982.

† Indicheremo d'ora in avanti le quantità vettoriali con lettere in grassetto.

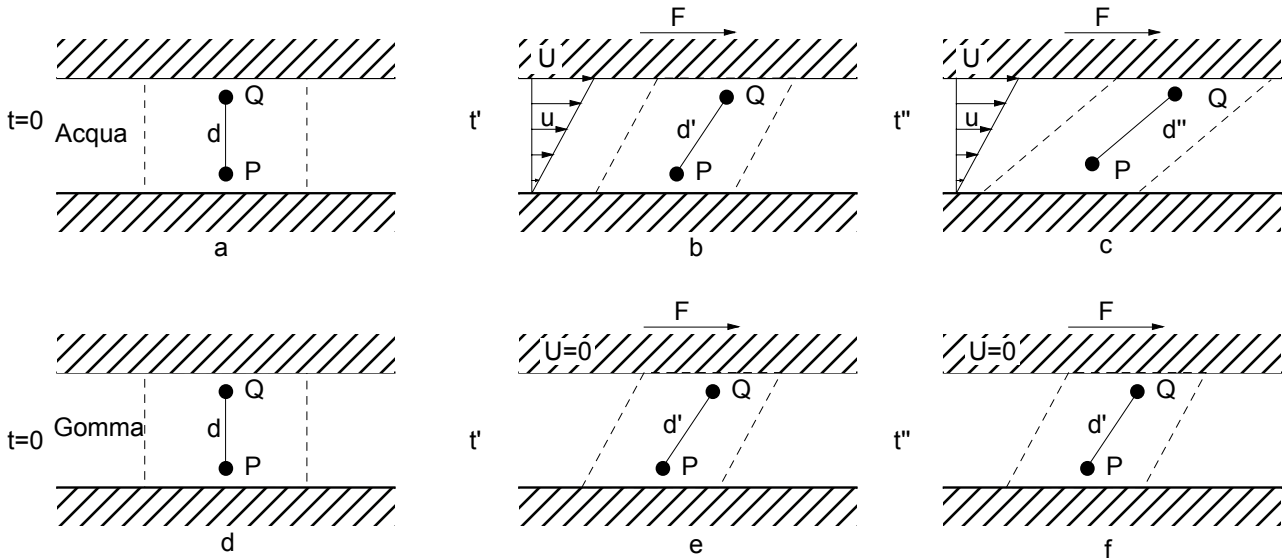


FIGURA 1

Ripetiamo poi l'esperimento riempiendo l'intercapedine con acqua: in questo caso osserveremo che la lastra superiore inizia a muoversi ed accelera fino a raggiungere una velocità U costante. All'interno vi sarà una distribuzione di velocità crescente da zero in prossimità della lastra inferiore, fino ad U alla lastra superiore, come indicato nelle Figure 1b,c. In questo caso quindi il materiale non raggiunge una configurazione di equilibrio ma continua a deformarsi all'infinito. Ciò nondimeno la velocità con cui si deforma tende ad un valore finito. Per valutare la deformazione in modo quantitativo possiamo individuare due punti P e Q , solidali al materiale che riempie l'interstizio tra le due lastre, e misurare le variazioni relative della loro distanza:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{d}$$

Per valutare invece la velocità di deformazione si potrà invece misurare la variazione relativa della distanza, per unità di tempo:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{1}{d} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Osserveremo, per tali quantità, nel caso della gomma, :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \varepsilon \rightarrow \varepsilon_0 \\ \dot{\varepsilon} \rightarrow 0 \end{cases}$$

mentre nel caso dell'acqua:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{cases} \varepsilon \rightarrow \infty \\ \dot{\varepsilon} \rightarrow \dot{\varepsilon}_0 \end{cases}$$

Si può concludere quindi che applicando alla gomma una sollecitazione costante nel tempo si ottiene, a regime, una deformazione costante ed una velocità di deformazione nulla. Ripetendo l'esperimento con diversi valori della forza, F , si potrà osservare inoltre che, tanto più grande è la forza, tanto maggiore è la deformazione. Questo è un comportamento tipico di un materiale solido. Applicando invece una sollecitazione costante all'acqua, dopo la fase transitoria, la deformazione aumenta indefinitamente, tendendo all'infinito, mentre la velocità di deformazione tende ad

assumere un valore costante, finito. Ripetendo l'esperimento per diversi valori della sollecitazione si osserverà, in questo caso, che la velocità di deformazione è tanto più grande quanto maggiore è la sollecitazione. Prenderemo proprio questo comportamento come caratteristico di un fluido. Possiamo pertanto definire *fluido* quel *mezzo continuo* per cui, in conseguenza di una sollecitazione costante, ad un tempo infinito corrisponde una velocità di deformazione finita e quindi misurabile.

Il concetto di mezzo continuo, sopra citato, è necessario per poter utilizzare gli strumenti del calcolo analitico nello studio di questi fenomeni. Si rende perciò necessario spendere qualche parola per chiarirlo e precisarlo. La materia che, come è noto è costituita da particelle elementari, ciò nondimeno sarà trattata in seguito come un mezzo continuo; si supporrà cioè che la massa sia distribuita con continuità nello spazio. Questo permetterà di considerare le grandezze fisiche che caratterizzano i fenomeni in gioco come funzioni continue reali dello spazio \mathcal{R}^3 e del tempo. In effetti le caratteristiche del fluido, inteso come mezzo continuo saranno ottenute attraverso delle medie effettuate su di volumi molto piccoli detti *particelle fluide*. La dimensione di questi volumetti, che corrisponde anche alla minima scala alla quale possiamo descrivere il comportamento di un fluido come mezzo continuo, deve essere sufficientemente piccola rispetto alle scale dei fenomeni, affinché le grandezze medie su di esso possano essere approssimate con uno sviluppo di Taylor al primo ordine, ma grande abbastanza da contenere un numero di particelle elementari così elevato che le medie siano statisticamente significative. L'ipotesi del continuo porta dunque ad ignorare la struttura intima della materia a livello atomico e la descrizione del moto a tale livello. Per tenere conto di questi moti vengono introdotte invece variabili termodinamiche come la temperatura la quale è legata all'energia media dei moti a livello atomico e subatomico.

Si consideri un punto P, individuato dalla sua posizione \mathbf{x} , all'interno del fluido in esame, ed un volume ΔV che lo racchiude: indicata con ΔM la massa contenuta in ΔV , il limite:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (1)$$

non è una funzione continua delle variabili spaziali e dipende dal modo con cui si fa tendere il volume a zero (possono essere considerate sfere, cubi con centro in P o altre figure geometriche), essendo funzione del comportamento delle particelle elementari che sono presenti nel volume. In effetti esiste ed è unico solo il limite per $\Delta V \rightarrow \Delta V_p$, con ΔV_p volume della particella fluida. In questo caso infatti il numero di particelle elementari contenute nel volume è così grande da fare sì che la massa mediamente contenuta in esso sia indipendente dal comportamento delle singole particelle elementari e dal modo in cui il volume viene fatto tendere a ΔV_p . L'ipotesi di mezzo continuo permette di considerare il limite $\Delta V \rightarrow \Delta V_p$ equivalente al limite $\Delta V \rightarrow 0$. Essa difatti corrisponde a supporre che la particella fluida sia così piccola rispetto alla scala dei fenomeni che si stanno osservando, da poter essere considerata puntiforme. Si suppone inoltre che tale limite sia una funzione continua di classe C^n del punto e del tempo, Tale funzione, la *densità*, verrà indicata con $\rho(\mathbf{x}, t)$:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_p} \frac{\Delta M}{\Delta V} \cong \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (1)$$

In questa trattazione, nella quale verranno considerati fluidi incomprimibili, la densità sarà sempre considerata costante sia nello spazio sia nel tempo e dipendente solo dal fluido cui si riferisce (aria, acqua, olio ecc.).

1. CINEMATICA DEI FLUIDI

Ogni azione bisogna che s'eserciti per moto. Il moto è causa d'ogni vita

1.1. Tensore gradiente di velocità

Per la descrizione del comportamento cinematico nell'intorno di un punto consideriamo un volumetto infinitesimo, tale che la velocità al suo interno possa essere approssimata con uno sviluppo di Taylor al prim'ordine. Scegliamo una terna di assi di riferimento che, ad un certo istante, ha origine nel baricentro della particella stessa.

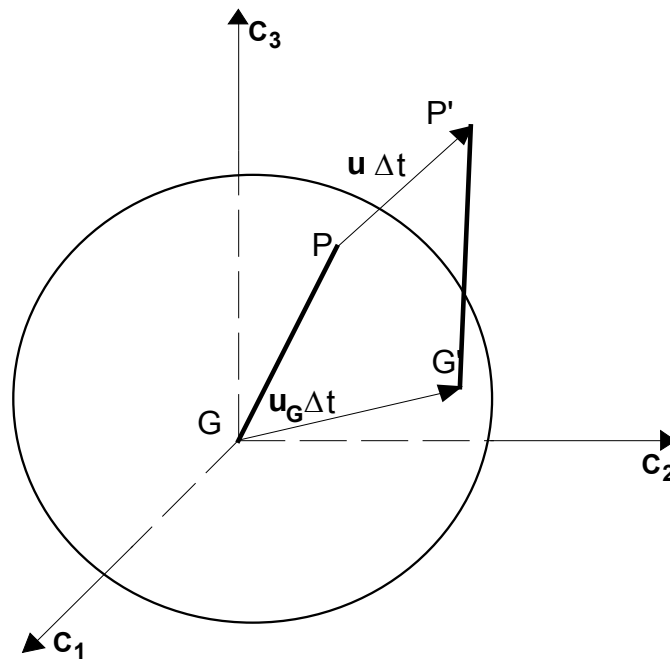


FIGURA 2

Il baricentro G, durante l'intervallo di tempo Δt , si sposta nel punto G' con velocità $(\mathbf{u})_G$:

$$GG' = (\mathbf{u})_G \Delta t \quad (2)$$

Un generico punto P della particella fluida, individuato dalla sua posizione $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, si sposta nello stesso intervallo di tempo in P' con velocità \mathbf{u} (Figura 2):

$$PP' = (\mathbf{u})_P \Delta t \quad (3)$$

La velocità, \mathbf{u} , del punto P, generalmente diversa da $(\mathbf{u})_G$, si ottiene come sviluppo in serie nell'intorno dell'origine (che coincide con il baricentro della particella):

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u})_G + \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_G x_i + \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_G x_i x_j + \dots \quad (4)$$

Tenendo conto della definizione di particella, i termini di ordine superiore al primo possono essere trascurati, pertanto*:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u})_G + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_G x_i = (\mathbf{u})_G + \nabla \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{x} \quad (5)$$

Lo spostamento di un generico punto di una particella fluida è dunque descritto dal tensore gradiente di velocità valutato nel baricentro:

$$\nabla \mathbf{u}^t = \begin{vmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \partial u_1 / \partial x_2 & \partial u_1 / \partial x_3 \\ \partial u_2 / \partial x_1 & \partial u_2 / \partial x_2 & \partial u_2 / \partial x_3 \\ \partial u_3 / \partial x_1 & \partial u_3 / \partial x_2 & \partial u_3 / \partial x_3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{r}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \quad (6)$$

Il tensore gradiente di velocità, come qualsiasi altro tensore, può essere decomposto nella somma di due tensori, uno antisimmetrico $\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \text{skew}(\nabla \mathbf{u}^t)$ ed uno simmetrico $\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \text{sym}(\nabla \mathbf{u}^t)$:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

tali che: $\nabla \mathbf{u}^t = (\underline{\underline{\mathbf{e}}} + \underline{\underline{\mathbf{r}}})^\dagger$. Quindi la velocità del generico punto di una particella è data da:

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_i)_G + r_{ij} x_j + e_{ij} x_j \quad (8)$$

Il moto può essere considerato, come sarà visto in seguito, come la somma di:

- una traslazione con la velocità del baricentro della particella;
- una rotazione rigida descritta dal tensore $\underline{\underline{\mathbf{r}}}$;
- una velocità di deformazione descritta dal tensore $\underline{\underline{\mathbf{e}}}$.

Il significato del primo addendo è immediato, mentre quello del secondo e del terzo addendo sarà discusso nei prossimi paragrafi.

1.1.1. Rotazione rigida

Si consideri un moto di rotazione rigida infinitesima attorno a G, il teorema di Eulero mostra che la rotazione rigida, oltre al punto G, mantiene fissi tutti i punti di una retta passante per G: l'asse di rotazione.

Senza perdere di generalità, si può assumere come asse 3 l'asse di una rotazione che avviene con velocità angolare Ω (Figura 3). Indicata con d la distanza dall'asse di rotazione di un generico punto P inizialmente posto sull'asse \mathbf{c}_1 , le relazioni che descrivono il suo moto, sono:

* Nella formula che segue, come nel seguito del testo, si utilizza la notazione di Einstein secondo la quale la presenza di un indice ripetuto sottintende la sommatoria da 1 a 3 (sulle tre direzioni dello spazio) a meno che tale indice non compaia al primo membro dell'equazione.

† D'ora in poi la doppia sottolineatura indicherà un tensore.

$$x_1 = d \cos \Omega t; \quad x_2 = d \sin \Omega t; \quad x_3 = \text{cost}; \quad (9)$$

dalle quali, derivando rispetto al tempo, si ottengono le componenti della sua velocità:

$$u_1 = -\Omega x_2; \quad u_2 = \Omega x_1; \quad u_3 = 0; \quad (10)$$

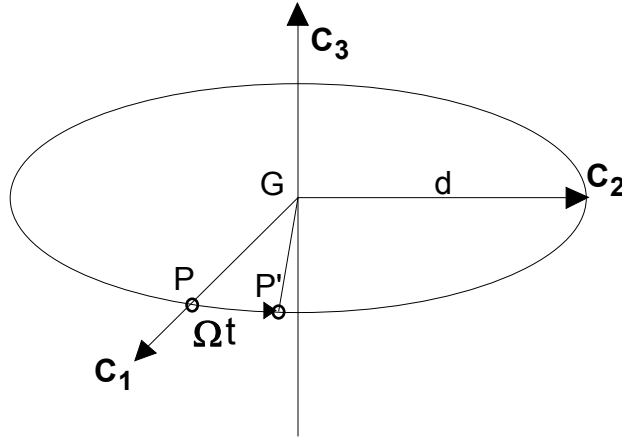


FIGURA 3

Il tensore simmetrico $\underline{\underline{e}}$ ha tutte le componenti nulle. Il tensore antisimmetrico, $\underline{\underline{r}}$, risulta:

$$\underline{\underline{r}} = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (11)$$

È quindi stabilito che questa forma del tensore gradiente di velocità comporta una rotazione rigida; d'altra parte, si può dimostrare che un qualsiasi tensore antisimmetrico può essere ricondotto nella forma precedentemente riportata, con solo due componenti diverse da zero e di segno contrario: se ne deduce che il moto descritto da un qualsiasi tensore antisimmetrico è di rotazione rigida.

Le proprietà di rotazione locale di un fluido sono descritte spesso attraverso la *vorticità* del campo, che è data da:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot}(\mathbf{u}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ -\Omega x_2 & \Omega x_1 & 0 \end{vmatrix} = 2\Omega \mathbf{c}_3. \quad (12)$$

Confrontando la definizione della vorticità dell'equazione 12, con l'espressione di $\underline{\underline{r}}$ dell'equazione precedente, è possibile capire come ci sia un legame stretto tra vorticità e parte antisimmetrica del tensore gradiente di velocità. In particolare si può affermare che noto che sia l'uno si può ottenere l'altro e viceversa. Per far ciò utilizzando le due relazioni di cui sopra è sufficiente porsi preventivamente nel sistema di riferimento che riduca il tensore $\underline{\underline{r}}$ nella forma dell'equazione 11 ed usare poi l'equazione 12.

1.1.2. Velocità di deformazione

Se ci si pone in un sistema di riferimento che ruoti di rotazione rigida solidalmente alla particella fluida che stiamo considerando, il moto sarà descritto dal solo tensore simmetrico, $\underline{\underline{r}} = \underline{\underline{0}}$, $\nabla \mathbf{u}^t = \underline{\underline{e}}$. Essendo $\underline{\underline{e}}$ simmetrico, esiste un sistema di riferimento, detto principale, in cui risultano non nulle solo le componenti della diagonale principale. La velocità di un generico punto in questo sistema di riferimento che, si ricorda essere centrato nel baricentro della particella e ruotare solidalmente ad

essa, è data da:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{e}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{e}_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{11}x_1 \\ \mathbf{e}_{22}x_2 \\ \mathbf{e}_{33}x_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

quindi la u_1 risulta solo funzione della x_1 e, più in generale, u_i è funzione solo di x_i :

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} = 0 \quad (13)$$

Pertanto i punti che si trovano sugli assi coordinati si muovono rimanendo sugli assi; se consideriamo infatti un punto sull'asse 1, di coordinate $(x_1, 0, 0)$, la sua velocità sarà $\mathbf{u} = (\mathbf{e}_{11}x_1, 0, 0)$, e quindi diretta in direzione 1.

In un sistema di riferimento non principale, i punti che inizialmente si trovano lungo gli assi coordinati si muovono non mantenendosi sugli assi stessi. Con riferimento alla Figura 4, risulta che la velocità di un punto P che si trova all'istante iniziale sull'asse \mathbf{c}_1 è dato da:

$$u_1(\mathbf{P}) = \mathbf{e}_{11} x_1; \quad u_2(\mathbf{P}) = \mathbf{e}_{21} x_1; \quad u_3(\mathbf{P}) = \mathbf{e}_{31} x_1 \quad (3)$$

analogamente per il punto Q che si trova sull'asse \mathbf{c}_2 :

$$u_1(\mathbf{Q}) = \mathbf{e}_{12} x_2; \quad u_2(\mathbf{Q}) = \mathbf{e}_{22} x_2; \quad u_3(\mathbf{Q}) = \mathbf{e}_{32} x_2 \quad (4)$$

Consideriamo ora gli spostamenti che avvengono in un intervallo di tempo Δt , i punti P e Q, che hanno inizialmente coordinate:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

si sposteranno in P' e Q', di coordinate:

$$\mathbf{P}' = \begin{pmatrix} x_1 + (\Delta x_1)_P \\ (\Delta x_2)_P \\ (\Delta x_3)_P \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}' = \begin{pmatrix} (\Delta x_1)_Q \\ x_2 + (\Delta x_2)_Q \\ (\Delta x_3)_Q \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Gli spostamenti lungo gli assi sono:

$$(\Delta x_1)_P = (u_1)_P \Delta t = \mathbf{e}_{11} x_1 \Delta t; \quad (\Delta x_2)_Q = (u_2)_Q \Delta t = \mathbf{e}_{22} x_2 \Delta t;$$

pertanto i termini della diagonale principale:

$$\mathbf{e}_{11} = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \right)_P \frac{1}{\Delta t}; \quad \mathbf{e}_{22} = \left(\frac{\Delta x_2}{x_2} \right)_Q \frac{1}{\Delta t} \quad (7)$$

rappresentano le velocità di allungamento relativo, lungo gli assi coordinati, dei segmenti OP ed OQ. Naturalmente, per analogia, il ragionamento può essere esteso al terzo elemento della

diagonale.

Per i termini che non si trovano sulla diagonale principale si ha:

$$e_{21} = \left(\frac{\Delta x_2}{x_1} \right)_P \frac{1}{\Delta t} = \frac{\text{tg} \Delta \theta_{21}}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \theta_{21}}{\Delta t}; \quad e_{12} = \left(\frac{\Delta x_1}{x_2} \right)_Q \frac{1}{\Delta t} = \frac{\text{tg} \Delta \theta_{12}}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \theta_{12}}{\Delta t} \quad (14)$$

avendo confuso la tangente con l'angolo. L'angolo, α , formato dai due segmenti materiali OP ed OQ è inizialmente retto; dopo un intervallo di tempo Δt , i due segmenti formeranno un angolo

$$\alpha' = \pi/2 - \Delta \theta_{12} - \Delta \theta_{21} = \pi/2 - 2 e_{12} \Delta t,$$

poiché $e_{21} = e_{12}$ e quindi $\Delta \theta_{21} = \Delta \theta_{12}$. La velocità di variazione dell'angolo tra i due segmenti è dunque:

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{(\alpha' - \alpha)}{\Delta t} = -2e_{12}. \quad (8)$$

Più in generale si può concludere che le componenti del tensore e_{ij} , con $i \neq j$, rappresentano $1/2$ della variazione nell'unità di tempo dell'angolo, inizialmente retto, formato dai segmenti materiali che si trovano lungo gli assi c_i e c_j .

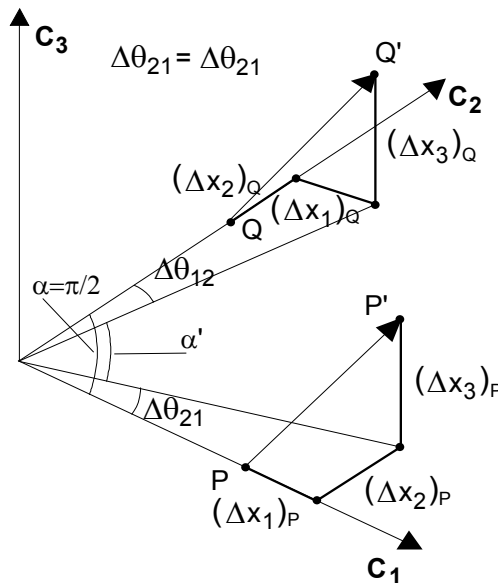


FIGURA 4

Si consideri infine una particella fluida di forma parallelepipedica con i lati paralleli agli assi della terna principale, e di volume $V = d_1 d_2 d_3$ (Figura 5).

In questo sistema di riferimento, con le ipotesi fatte all'inizio di questo paragrafo, il tensore gradiente della velocità assume la forma: $(\nabla u^i)_{ij} = u_{i,j} \delta_{ij} = e_{ii}^*$. Dopo la deformazione, avvenuta nel tempo Δt , i lati rimangono paralleli in quanto tutti i punti che si trovano lungo gli assi coordinati restano sugli assi coordinati stessi. Il lato inizialmente di lunghezza d_i , dopo la deformazione sarà:

$$d_i' = d_i + e_{ii} \Delta t d_i = d_i (1 + e_{ii} \Delta t) \quad (15)$$

* Il simbolo δ_{ij} rappresenta il delta di Kronecker e vale 1 quando $i = j$, mentre vale 0 se $i \neq j$

quindi il volume al tempo Δt è dato da:

$$V' = V (1 + e_{11} \Delta t) (1 + e_{22} \Delta t) (1 + e_{33} \Delta t) \quad (16)$$

A meno di termini di ordine superiore la variazione relativa di volume nell'unità di tempo è data da:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \text{tr}(\underline{e}) = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div}(\mathbf{u}) \quad (17)$$

La divergenza, che è la traccia* del tensore gradiente della velocità, è invariante rispetto ad un cambiamento di sistema di riferimento, pertanto il suo significato di velocità di variazione volumetrica relativa rimane valido in qualsiasi sistema di riferimento. Nel caso di fluidi omogenei incomprimibili, per i quali ogni porzione di fluido mantiene costante il suo volume, la velocità di variazione è nulla per cui deve essere nulla anche la divergenza, come sarà in seguito dimostrato anche per mezzo dell'equazione di bilancio della massa.

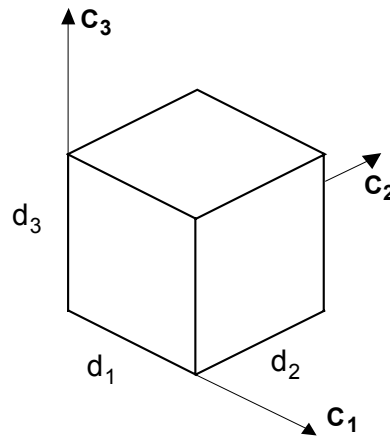


FIGURA 5

Osservando che la divergenza di \mathbf{u} , oltre ad essere la traccia del gradiente di velocità è anche la traccia del tensore velocità di deformazione, il risultato testé ottenuto consente una ulteriore scomposizione del tensore gradiente di velocità trasposto. Possiamo scomporre, infatti, \underline{e} in parte sferica e parte deviatoria†:

$$\nabla \mathbf{u}^t = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{e}) \underline{\mathbb{I}} + \left(\underline{e} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{e}) \underline{\mathbb{I}} \right) + \underline{r}; \quad (9)$$

ottenendo così la descrizione locale del moto come somma di tre termini: il primo rappresenta la velocità di variazione volumetrica; il secondo, che per definizione ha traccia nulla, descrive una velocità di deformazione a volume costante; mentre il terzo, al solito, rappresenta la velocità di rotazione rigida.

1.2. Descrizione lagrangiana ed euleriana di un campo

Nella meccanica dei fluidi i fenomeni fisici sono descritti attraverso campi scalari o vettoriali

* Si definisce traccia di un tensore la somma delle sue componenti lungo la diagonale principale: $\text{tr}(\underline{A}) = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$.

† Ogni tensore \underline{A} può essere scomposto come: $\underline{A} = 1/3 \text{tr}(\underline{A}) \underline{\mathbb{I}} + [\underline{A} - 1/3 \text{tr}(\underline{A}) \underline{\mathbb{I}}]$. Il primo termine rappresenta la parte sferica ed il secondo la parte deviatoria. $\underline{\mathbb{I}}$ rappresenta il tensore unitario di coordinate ($\underline{\mathbb{I}}_{ij} = \delta_{ij}$).

che rappresentano le grandezze fisiche che caratterizzano il fenomeno. Se per esempio si intende studiare il moto convettivo di un fluido, le grandezze che lo descriveranno saranno un campo scalare, la temperatura, ed uno vettoriale, la velocità. La descrizione di questi campi può avvenire in due modi fondamentali:

- *lagrangiano* o materiale, secondo il quale si descrive la variazione temporale delle grandezze seguendo il moto di ciascuna particella;
- *euleriano* o locale, secondo il quale, fissata una posizione, si descrive ciò che accade in quel punto al passare del tempo.

Questo corrisponde anche a due modi diversi nei quali è possibile misurare le grandezze fisiche: supponiamo, ad esempio, di voler misurare la temperatura in un flusso determinato dalla convezione. Potremmo disperdere nel fluido piccole particelle costituite da cristalli liquidi; queste sostanze hanno la caratteristica di cambiare colore in funzione della temperatura; se, inoltre, le particelle sono sufficientemente piccole ed hanno una densità vicina a quella del fluido nel quale sono immerse, possiamo senz'altro supporre che esse seguano fedelmente il moto del fluido. Quindi, seguendo ciascuna delle particelle nel suo moto ed osservando le sue variazioni di colore potremo risalire alle variazioni della temperatura su di una particella fluida: avremo ottenuto, in questo caso, una descrizione lagrangiana del campo. Se, al contrario, utilizziamo una sonda fissa in un punto del campo, per esempio una termocoppia, ed osserviamo come varia la temperatura in quel punto, otteniamo una descrizione euleriana.

1.2.1. Descrizione Euleriana

Fissata una posizione \mathbf{x} , si osserva ciò che accade in quel punto al passare del tempo ad una grandezza A che caratterizza il comportamento del fluido: temperatura, velocità, pressione, ecc.. Le variabili indipendenti sono dunque la posizione \mathbf{x} ed il tempo:

$$A = A(\mathbf{x}, t).$$

La sua evoluzione temporale è descritta per mezzo della cosiddetta derivata *euleriana*, che si ottiene derivando rispetto al tempo il campo della grandezza A , mantenendo fissa la posizione dello spazio:

$$\left(\frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}=\text{cost.}}$$

1.2.2. Descrizione Lagrangiana

Per poter effettuare questo tipo di descrizione è necessario innanzitutto identificare univocamente ogni particella fluida con una etichetta. Poiché in un fluido, che è un mezzo continuo, le particelle non sono un insieme numerabile, ma ha le dimensioni di \mathfrak{R}^3 (le stesse dello spazio euclideo in cui si muovono), le particelle non potranno essere contraddistinte attraverso un numero intero, sarà invece necessaria una terna di numeri reali. La scelta che viene convenzionalmente fatta è quella di identificare le particelle per mezzo della posizione, \mathbf{x}_0 che esse assumono in un istante di riferimento, o istante iniziale.

Una volta identificata, la particella è seguita nel tempo, determinando, ad esempio, l'equazione della sua traiettoria:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) \quad (10)$$

sono individuate nello stesso modo le altre grandezze relative alla particella: temperatura, pressione, ecc.. Per una generica grandezza A avremo:

$$A = A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t).$$

Le variabili indipendenti, in questa descrizione del moto, sono le tre coordinate iniziali x_{0i} ed il tempo, t .

La derivata *sostanziale* (o materiale o lagrangiana) di una assegnata grandezza, A , è definita dalla derivata parziale rispetto al tempo, avendo tenuta fissa la particella, quindi con \mathbf{x}_0 fissato:

$$\frac{DA}{Dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost.}}$$

In particolare la velocità e l'accelerazione di una particella sono date da:

$$\mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t) = \left(\frac{\partial x_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost}}$$

$$\mathbf{a}_i(\mathbf{x}_0, t) = \left(\frac{\partial \mathbf{u}_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost}} = \left(\frac{\partial^2 x_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t^2} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost}}$$

Per trovare che relazione ci sia tra la derivata euleriana e quella lagrangiana, consideriamo il differenziale di $A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t)$, mantenendo fisso \mathbf{x}_0 , che è dato da:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial x_j} dX_j \quad (11)$$

e quindi:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{dX_j}{dt} \quad (12)$$

Il termine $(dX_j/dt)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost.}}$ rappresenta proprio la derivata rispetto al tempo della posizione della particella e quindi la velocità u_j . La derivata lagrangiana può essere dunque scritta come:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_j} u_j, \quad (13)$$

nella quale il primo termine a secondo membro rappresenta la derivata euleriana.

In particolare, nel caso in cui A sia la velocità, si ottiene l'accelerazione:

$$\begin{aligned} a_i &= \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j; \\ \mathbf{a} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u} \end{aligned} \quad (14)$$

Alla stessa relazione si può pervenire per altra via. Si consideri una particella P che, all'istante t , occupa la posizione \mathbf{x} . Trascorso un intervallo di tempo Δt , la particella P si porta in P' , di coordinate $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$. Individuiamo con Q la particella che al tempo $t + \Delta t$ si porta proprio nella posizione che al tempo iniziale t era occupata dalla particella P (Figura 6).

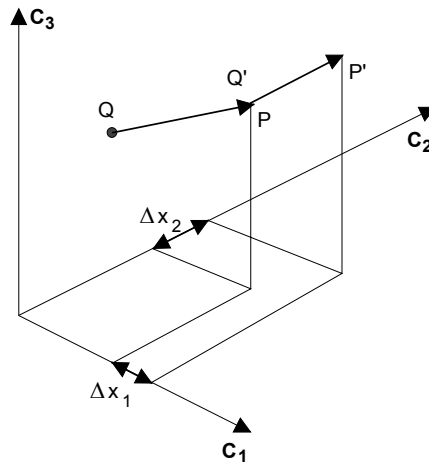


FIGURA 6

La variazione locale della grandezza A è data dalla:

$$A(Q') - A(P) = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t \quad (15)$$

ed è quindi rappresentata dalla derivata parziale rispetto al tempo. Se consideriamo la variazione (lagrangiana) di A sulla particella P:

$$A(P') - A(P) = \{A(P') - A(Q')\} + \{A(Q') - A(P)\} \quad (16)$$

la quantità $\{A(P') - A(Q')\}$ è la differenza tra i valori che la quantità A assume, nello stesso istante, in punti differenti; questa quantità è dunque data da:

$$A(P') - A(Q') = \frac{\partial A}{\partial x_j} \Delta x_j \quad (17)$$

Quindi la derivata lagrangiana risulta:

$$\frac{DA}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(P') - A(P)}{\Delta t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} \quad (18)$$

Si può osservare che, essendo dx_j/dt le componenti della velocità della particella P, si arriva alla relazione precedentemente ottenuta.

Per riepilogare i diversi tipi di derivate temporali che è possibile calcolare, si considerino, ad esempio, in un corso d'acqua, tre punti di vista:

- quello di un sasso poggiato sul fondo che rimane fermo nel tempo;
- quello di una foglia che viene trasportata dalla corrente ed ha quindi la stessa velocità del fluido con cui è a contatto;
- quello di un pesce libero di muoversi in qualsiasi direzione con qualsiasi velocità.

La generica derivata rispetto al tempo di una grandezza associata al fluido è quella effettuata dal pesce che si sposta di Δx nel tempo Δt :

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (19)$$

In questo caso dx_i / dt è la velocità del pesce e non quella del fluido. La derivata parziale rispetto al tempo, $\partial A / \partial t$, è quella effettuata dal punto di vista del sasso, mentre la derivata lagrangiana, o sostanziale, è quella effettuata dal punto di vista della foglia, per la quale la dx_i / dt nella relazione precedente coincide con la velocità del fluido, u_i .

1.3. Classificazione dei moti

A seconda del parametro considerato i moti di un fluido possono essere classificati in vario modo; alcune possibili classificazioni sono:

- *Tridimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da tutte le variabili indipendenti spaziali.
- *Bidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da due variabili indipendenti spaziali; se tali variabili sono due coordinate cartesiane si parla di moto piano; se tali variabili sono θ e r in coordinate cilindriche si parla di moto assialsimmetrico.
- *Unidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da una sola variabile spaziale indipendente; è questo il caso del moto in un condotto.
- *Permanenti o stazionari*: se le grandezze che caratterizzano il moto non dipendono dal tempo; in tal caso, in una descrizione euleriana, sono nulle le derivate parziali rispetto al tempo.
- *Subcritici o supercritici*: a seconda che la velocità del fluido sia molto inferiore o comparabile alla velocità di propagazione delle piccole perturbazioni.

Sono definiti inoltre i seguenti luoghi geometrici:

- *Traiettoria di una particella*: il luogo dei punti occupati in tempi successivi dalla stessa particella fluida;
- *Linea di corrente (o linea di flusso)*: è una linea che ha per tangente il vettore velocità in ogni punto;
- *Linea di fumo*: è il luogo dei punti occupati, ad un dato istante, dalle particelle che sono passate per uno stesso punto.

Nel caso di moto permanente i tre luoghi geometrici, precedentemente introdotti, coincidono.

2. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

La meccanica è il paradiso delle scienze matematiche, perché con quella si viene al frutto matematico.

2.1. I principi della meccanica dei fluidi

La meccanica dei fluidi è basata su due classi di ipotesi fondamentali dalle quali si parte per ottenere un sistema di equazioni differenziali in cui vi siano tante equazioni quante incognite: i *principi di bilancio*, che caratterizzano la dinamica dei fluidi, e le *equazioni costitutive e di stato*, che stabiliscono delle relazioni tra stato tensionale e deformazioni (o velocità di deformazione) per ciascun fluido.

I principi sui quali si basa la dinamica dei fluidi sono:

1. Conservazione della massa;
2. Bilancio della quantità di moto;
3. Bilancio del momento della quantità di moto.

Vediamo qual è il significato di ciascun principio, e come si esprime nel caso di un fluido incomprimibile come quelli che qui si considerano.

2.1.1. Principio di conservazione della massa:

LA MASSA DI UNA QUALSIASI PORZIONE DI FLUIDO È COSTANTE.

Per porzione di fluido si intende un volume costituito sempre dalle *stesse** particelle fluide: se il fluido si muove, tale volume si muoverà insieme al fluido. Questo principio stabilisce che la stessa materia è sempre caratterizzata dalla stessa massa, ovvero che la massa è una proprietà caratteristica della materia. Questa formulazione, facendo riferimento alle stesse particelle fluide, può essere definita lagrangiana. D'altra parte nella pratica è di gran lunga più utile avere a disposizione una formulazione euleriana, ovvero riferita ad una porzione definita di spazio.

Per esprimerlo in questo modo si consideri un volume, V_c , fisso nel tempo, detto *volume di controllo*. La massa contenuta al suo interno sarà:

$$m = \int_{V_c} \rho dV \quad (20)$$

Nel caso di fluido incomprimibile si può assumere che la densità, ρ , sia costante in tutti i punti ove non ci sia né creazione né distruzione di materia; ne segue immediatamente che la massa, m , contenuta nel volume di controllo, dovrà essere costante se, come afferma il principio, non viene generata né distrutta materia in nessun punto.

* Nota bene che si parla di un volume costituito sempre dalle stesse particelle, proprio loro, e non costituito sempre dallo stesso numero di particelle.

D'altra parte, se il fluido è in moto e dotato di velocità $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, attraverso ogni porzione infinitesima della superficie del volume di controllo, S_c , ci sarà un flusso di massa. Per calcolarlo osserviamo innanzitutto che il volume di fluido che attraversa un elementino di superficie nell'intervallo di tempo dt è pari a :

$$dV = (\mathbf{u} dt) \cdot \mathbf{n} dS . \quad (21)$$

Infatti il fluido che attraversa l'elementino dS nel tempo dt ha per base dS e per altezza $(\mathbf{u} dt) \cdot \mathbf{n}$ (Figura 7). Il flusso di massa attraverso dS risulta quindi:

$$d\Phi_m = \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS; \quad (22)$$

che, integrato sull'intera superficie S_c fornisce il flusso complessivo* :

$$\Phi_m = \int_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (23)$$

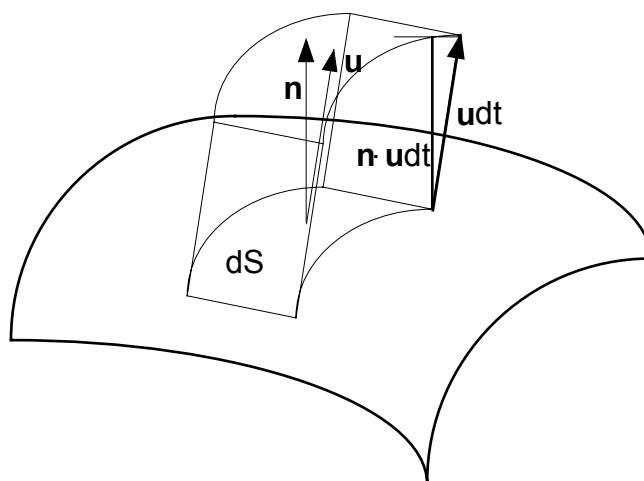


FIGURA 7

Se la massa all'interno del volume di controllo è costante, allora il bilancio netto del flusso attraverso l'intera superficie deve essere nullo; otteniamo così l'equazione globale di bilancio della massa per un fluido incomprimibile:

$$\boxed{\Phi_m = 0} \quad (24)$$

che fornisce un bilancio su di un volume di controllo.

Per ottenere una forma locale, applichiamo all'equazione (24), divisa per la densità, ρ , che è costante, il teorema della divergenza:

$$0 = \int_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_c} \nabla \cdot \mathbf{u} dV \quad (25)$$

Affinché la relazione precedente sia verificata per qualsiasi V_c , ipotizzando che \mathbf{u} sia una funzione continua e derivabile, occorre che la funzione integranda sia nulla in tutto il campo; si ottiene

* Più in generale, se consideriamo una generica proprietà A , invece della densità, nel ragionamento, si evince che il flusso di A attraverso una superficie S è: $\Phi_A = \int_S A \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$

quindi l'equazione di conservazione della massa in forma locale, o come viene a volte chiamata, l'*equazione di continuità*:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (26)$$

la quale, ricordiamo, vale per fluidi incomprimibili. La stessa equazione per componenti si può scrivere:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (27)$$

avendo sottinteso, al solito, le somme sull'indice ripetuto.

2.1.2. Principio di bilancio della quantità di moto (Eulero, 1752)

LA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO, NELL'UNITÀ DI TEMPO, DI UNA QUALSIASI PORZIONE DI FLUIDO È PARI ALLA RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE CHE AGISCONO SULLA PORZIONE DI FLUIDO STESSA.

Questo principio che, al solito, è stato enunciato in forma lagrangiana, può essere considerato a buon titolo la definizione vera e propria di massa inerziale. Infatti vedremo che esso stabilisce una relazione tra le forze applicate al fluido ed il suo moto e che questa relazione è stabilita proprio attraverso la densità (ovvero la massa). Potremo affermare, in sintesi, che questo principio definisce cos'è la massa, mentre quello precedente (di conservazione della massa) permette di stabilire che la massa è una proprietà intrinseca della materia.

Per ottenere una formulazione euleriana consideriamo, di nuovo, un volume di controllo V_c ; la sua quantità di moto, \mathbf{q} , è:

$$\mathbf{q} = \int_{V_c} \rho \mathbf{u} dV. \quad (28)$$

La quantità di moto contenuta in V_c può, in generale, variare per due motivi: in ragione di un flusso attraverso la superficie del volume di controllo, e perché il fluido contenuto in V_c varia la sua quantità di moto a causa della presenza di forze esterne. La variazione di \mathbf{q} nell'unità di tempo è quindi data da:

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = -\mathbf{M} + \mathbf{R}; \quad (29)$$

nella quale \mathbf{M} rappresenta il flusso di quantità di moto che esce attraverso la superficie del volume di controllo, ed il segno meno è dovuto al fatto che ad un flusso uscente positivo corrisponde una diminuzione della quantità di moto contenuta in V_c ; mentre \mathbf{R} indica la risultante delle forze esterne che, come stabilito dal principio testé enunciato, contribuisce all'aumento della quantità di moto del fluido contenuto in V_c . Calcolando il flusso, \mathbf{M} , in modo analogo a quanto fatto per il flusso di massa, ma sostituendo $\rho \mathbf{u}$ a ρ otteniamo:

$$\mathbf{M} = \int_{S_c} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS; \quad (30)$$

essendo \mathbf{n} la normale esterna.

Scomponiamo ora la risultante delle forze esterne, \mathbf{R} , in una parte dovuta alle forze proporzionali alla massa ed in una dovuta alle forze applicate alla superficie. Se consideriamo un generico elementino della superficie, ΔS , con normale \mathbf{n} (esterna), sottoposto ad una forza di superficie $\Delta \mathbf{F}_s$, in congruenza con l'ipotesi del continuo esisterà e sarà funzione continua di classe C^n il limite:

$$\mathbf{t}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S} \quad (31)$$

che chiameremo *sforzo* (o *tensione*) relativo alla normale \mathbf{n} . Con riferimento alla Figura 8 \mathbf{t}_n rappresenta la forza, per unità di superficie, esercitata attraverso la faccia positiva sul fluido a contatto con la faccia negativa.

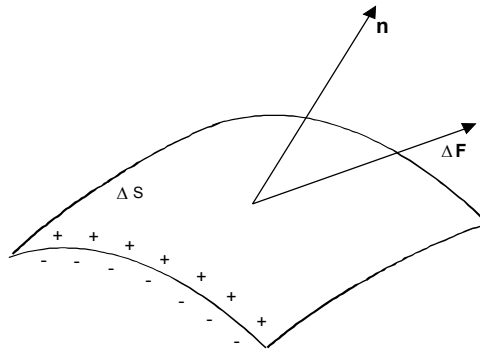


FIGURA 8

La risultante delle forze che agiscono sulla superficie del volume di controllo sarà quindi:

$$\mathbf{\Pi} = \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS \quad (32)$$

Analogamente esisterà e sarà funzione continua di classe C^n il limite:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_v}{\Delta m} \quad (33)$$

dove $\Delta \mathbf{F}_v$ sono le forze che agiscono su di un elementino di volume ΔV , e Δm è la sua massa; esso rappresenta le forze di massa applicate ad ogni punto del fluido. Possiamo allora scrivere la risultante delle forze di massa come:

$$\mathbf{G} = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV. \quad (34)$$

Sostituendo ad \mathbf{R} la somma di $\mathbf{\Pi}$ e \mathbf{G} otteniamo quindi l'*equazione globale di bilancio della quantità di moto*:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS; \quad (35)$$

la quale, indicando con \mathbf{I} il primo termine e ricordando la definizione degli altri può essere scritta nella forma sintetica:

$$\boxed{\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}} \quad (36)$$

cioè la risultante delle forze esterne (di massa e di superficie) applicate ad un volume di controllo uguaglia la somma della forza di inerzia locale, \mathbf{I} , e del flusso di quantità di moto attraverso la superficie che delimita il volume considerato.

Allo scopo di ottenere una formulazione locale di tale bilancio è necessario riportare tutti gli integrali di superficie dell'equazione (35) ad integrali di volume e questo va fatto per mezzo del teorema della divergenza. Per l'integrale a primo membro questo può essere fatto immediatamente mentre, per poterlo applicare all'integrale delle forze di superficie, che compare a secondo membro, è necessario introdurre un nuovo concetto, quello di tensore delle tensioni, cui sarà dedicato il prossimo paragrafo. Riprendiamo l'equazione e riscriviamola per componenti, osservando inoltre che V_c non dipende dal tempo ed è quindi possibile portare la derivata temporale sotto il segno di integrazione:

$$\int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{S_c} (\rho u_i u_j) n_j dS = \int_{V_c} \rho f_i dV + \int_{S_c} t_{in} dS. \quad (37)$$

Applichiamo ora il teorema di Green al secondo termine del primo membro, svolgiamo la derivata del prodotto e ricombiniamolo con il primo termine:

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} dV + \int_{V_c} \frac{\partial(\rho u_i u_j)}{\partial x_j} dV &= \int_{V_c} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} dV = \\ &= \int_{V_c} \rho \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] dV = \int_{V_c} \rho \frac{Du_i}{Dt} dV \end{aligned} \quad (38)$$

avendo osservato che la densità è costante, che $\partial u_j / \partial x_j = 0$ per un fluido incomprimibile ed avendo riconosciuto l'espressione della derivata lagrangiana nel termine tra parentesi quadre. Con queste trasformazioni l'equazione (35) può essere riscritta:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS. \quad (39)$$

2.1.3. Tensore delle tensioni

La tensione in un punto di un mezzo continuo, in generale, dipende dalla giacitura della superficie attraverso la quale si ammette che avvenga la sollecitazione. Per un punto assegnato, però, è possibile descrivere lo sforzo che si esercita attraverso una qualsiasi superficie per mezzo di un tensore, le cui coordinate sono una matrice 3×3 , detto tensore delle tensioni. Dimosteremo difatti nelle prossime righe che la tensione su di una superficie di giacitura qualsiasi, di normale \mathbf{n} , può essere scritta in funzione delle tensioni agenti sulle 3 superficie che hanno per normale i 3 versori degli assi coordinati. Si consideri, a tale scopo, il tetraedro limitato dalle superfici di area S_i che giacciono sui piani coordinati e dalla superficie di area S_n , che giace sul piano individuato dalla normale \mathbf{n} (detto *tetraedro di Cauchy*) (Figura 9). Sia inoltre h la distanza tra la superficie S_n e l'origine.

Le normali alla superficie sono assunte positive quando sono uscenti dal volume considerato; pertanto le normali positive relative alle facce che giacciono sui piani coordinati sono opposte ai versori \mathbf{e}_i che individuano gli assi coordinati.

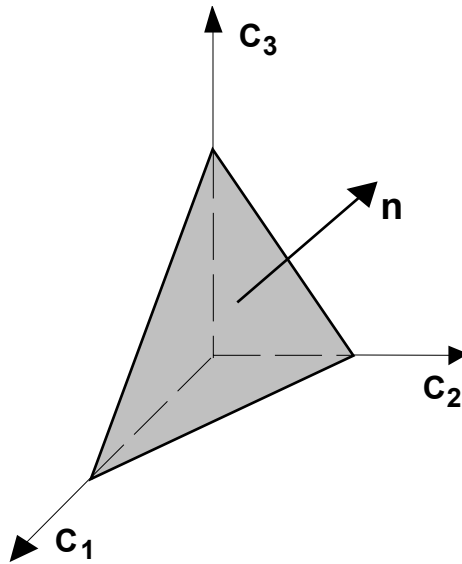


FIGURA 9

Applichiamo a questo tetraedro l'equazione (39) e valutiamo, al tendere di $h \rightarrow 0$, l'ordine di grandezza dei singoli termini: i 2 integrali di volume, sono proporzionali al volume V del tetraedro e, di conseguenza, ad h^3 ; l'integrale di superficie invece è proporzionale all'area e quindi ad h^2 . Al limite per h che tende a zero i due integrali di volume saranno allora trascurabili rispetto a quello di superficie, e dovrà quindi essere soddisfatta la:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS = 0, \quad (40)$$

la quale, per il tetraedro di Cauchy, afferma che la somma delle forze di superficie agenti su ciascuna faccia deve annullarsi.

Lo sforzo relativo alla generica superficie S_j , con normale \mathbf{c}_j , sarà indicato con $\boldsymbol{\tau}_j$, e la sua i -esima componente con τ_{ij} ; le componenti di questi tre sforzi possono essere ordinate secondo gli elementi di una matrice:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}. \quad (41)$$

In modo analogo indicheremo con $\boldsymbol{\tau}_n$ lo sforzo sulla quarta faccia, che ha per normale \mathbf{n} . Le τ_i sono relative alle normali \mathbf{c}_i , interne al tetraedro, e rappresentano le forze che il tetraedro esercita sul resto del fluido. Esse sono quindi uguali ed opposte alle sollecitazioni esterne che subisce il tetraedro. Per soddisfare la (40) dovrà essere:

$$\boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_1 S_1 - \boldsymbol{\tau}_2 S_2 - \boldsymbol{\tau}_3 S_3 = \boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_i S_i = 0, \quad (42)$$

dividendo per S_n :

$$\boldsymbol{\tau}_n = \frac{S_j}{S_n} \boldsymbol{\tau}_j = \cos \alpha_{nj} \boldsymbol{\tau}_j = \mathbf{n}_j \boldsymbol{\tau}_j, \quad (43)$$

dove α_{nj} è l'angolo formato tra la normale \mathbf{n} e il versore \mathbf{c}_j , ed il suo coseno è pari alla j -esima componente di \mathbf{n} . Utilizzando la matrice precedentemente definita:

$$\tau_{in} = \tau_{ij} n_j. \quad (44)$$

La matrice τ_{ij} rappresenta le componenti di un tensore, perché moltiplicata secondo le regole matriciali per le componenti di un vettore (n_j) fornisce sempre le componenti di un vettore (τ_{in}). Indicheremo questo tensore con $\underline{\underline{\tau}}$, e lo chiameremo *tensore delle tensioni*. Attraverso di esso possiamo esprimere lo sforzo, $\underline{\underline{t}}_n$, relativo ad un elemento di superficie con una generica normale \mathbf{n} :

$$\underline{\underline{t}}_n = \underline{\underline{\tau}} \mathbf{n}. \quad (45)$$

Questa relazione, che stabilisce l'esistenza del tensore delle tensioni, rappresenta il *teorema fondamentale di Cauchy* (Cauchy, 1822).

2.1.4. Equazione di Cauchy

Per poter scrivere un'equazione di bilancio della quantità di moto in forma differenziale è necessario trasformare l'integrale di superficie a secondo membro della (39) in un integrale di volume. Esprimiamo perciò gli sforzi attraverso il tensore delle tensioni come stabilito dalla (45):

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}} \mathbf{n} dS \quad (46)$$

ed applichiamo il teorema della divergenza:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{V_c} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} dV. \quad (47)$$

Questa relazione deve essere valida per *qualsiasi volume di controllo* V_c , quindi deve sussistere anche tra le funzioni integrande:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}. \quad (48)$$

La (48), è detta *equazione di Cauchy* e rappresenta la forma locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto. Essa può essere anche letta come una formulazione del secondo principio della dinamica applicato ad una particella fluida e scritto per unità di volume, infatti il primo membro rappresenta la massa (per unità di volume) per l'accelerazione della particella fluida mentre il secondo membro rappresenta la somma delle forze applicate alla particella fluida (sempre per unità di volume). Infine, sviluppando la derivata lagrangiana possiamo riscriverla per componenti:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (49)$$

2.1.5. Principio di bilancio del momento della quantità di moto (Eulero, 1775):

LA VARIAZIONE DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO, NELL'UNITÀ DI TEMPO, DI UNA QUALSIASI PORZIONE DI FLUIDO È PARI AL MOMENTO RISULTANTE DELLE FORZE ESTERNE CHE AGISCONO SULLA PORZIONE DI FLUIDO STESSA.

Il momento della quantità di moto di un volume di controllo, V_c , calcolato rispetto all'origine

degli assi, è un vettore definito da*:

$$\mathbf{k} = \int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV. \quad (50)$$

In analogia con il ragionamento fatto nel paragrafo precedente possiamo asserire che questa quantità può variare per due fattori: un flusso attraverso la superficie del volume di controllo ed il momento risultante delle forze esterne:

$$\frac{\partial \mathbf{k}}{\partial t} = \underbrace{- \int_{S_c} (\mathbf{x} \times \rho \mathbf{u})(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS}_{\text{Flusso uscente del momento della QdM}} + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS}_{\text{Momento delle forze di superficie}} + \underbrace{\int_{V_c} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV}_{\text{Momento delle forze di massa}}. \quad (51)$$

Questa equazione rappresenta il bilancio del momento della quantità di moto in forma globale. La sua forma locale, che non sarà ricavata in questa sede, si riduce a:

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^t}} \quad (52)$$

Imporre la simmetria del tensore delle tensioni corrisponde quindi a soddisfare il bilancio del momento della quantità di moto e, una volta ammessa questa simmetria, non ci sarà bisogno di fare ulteriori riferimenti ad esso.

Ricapitolando quanto osservato sinora possiamo affermare che: il principio di conservazione della massa, affermando che la stessa porzione di fluido ha sempre la stessa massa, stabilisce che essa è una proprietà intrinseca della materia intesa come mezzo continuo; il secondo principio, quello di bilancio della quantità di moto, stabilisce invece, come vedremo più avanti, a quale accelerazioni è soggetto un fluido sul quale agisce un determinato sistema di forze, e stabilisce inoltre che questa relazione si esplica attraverso la massa per unità di volume, ovvero la densità; quindi esso può essere considerato una definizione di massa per i mezzi continui; infine il principio di bilancio del momento della quantità di moto, infine, permette di stabilire alcune importanti caratteristiche di simmetria dello stato tensionale di un fluido.

2.2. Equazioni costitutive

Come si è accennato nel capitolo precedente, per chiudere il problema della meccanica dei fluidi, oltre alle equazioni di bilancio, che rappresentano i principi fondamentali della meccanica, abbiamo bisogno di equazioni che stabiliscano, per ciascun tipo di fluido, la relazione che c'è tra stato di tensione e stato di deformazione.

In genere uno stato di sollecitazione applicato ad un corpo produce una deformazione ed una variazione della deformazione nel tempo, cioè una velocità di deformazione. Sono definiti solidi quei mezzi continui nei quali, ad uno stato tensionale costante corrisponde una deformazione costante al limite per $t \rightarrow \infty$. Sono definiti fluidi quei mezzi continui nei quali uno stato tensionale costante produce una variazione della deformazione nel tempo ovvero una velocità di deformazione costante per $t \rightarrow \infty$. I fluidi che interessano le applicazioni più comuni della meccanica dei fluidi (acqua, aria, ecc.) rientrano tutti nella classe dei *fluidi Newtoniani*. Questi sono mezzi continui che hanno due tipi di comportamento diverso: uno per le variazioni di volume e l'altro per le deformazioni a volume costante. Se proviamo infatti ad imporre una variazione di volume ad una porzione di fluido, osserveremo che, per una assegnata sollecitazione si ottiene una variazione di volume costante, mentre se proviamo a deformare il fluido mantenendo costante il suo volume

* il simbolo \times indica, come di consueto, il prodotto vettoriale.

osserveremo che a mantenendo costante la sollecitazione costante il fluido continua a deformarsi, e che in effetti corrisponde una velocità di deformazione costante ad una sollecitazione costante. Avremo quindi due tipi di relazione: la prima per le variazioni volumetriche e la seconda per le deformazioni a volume costante.

Per ciò che riguarda le variazioni volumetriche, noi ammetteremo che sussista una relazione, detta *equazione di stato*, tra variazioni di volume e stato di sollecitazione normale. Se definiamo la pressione come l'opposto della parte sferica del tensore delle tensioni:

$$p = -\frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \quad (53)$$

l'equazione di stato sarà, in generale, della forma:

$$\rho = \rho(p, \text{variabili termodinamiche}) \quad (54)$$

La densità, ρ , è adatta a misurare le variazioni volumetriche in quanto essa non è altro se non l'inverso del volume specifico del fluido, ovvero il volume occupato per unità di massa. Nel caso di fluidi incompressibili questa equazione assume la forma limite:

$$\rho = \text{cost.};$$

la quale stabilisce che non c'è variazione di volume del fluido quale che sia la sollecitazione assegnata.

Per ciò che riguarda invece la deformazione a volume costante assumeremo una relazione *lineare omogenea ed isotropa* tra velocità di deformazione a volume costante e sollecitazione. Per scriverla ricordiamo innanzitutto che la velocità di deformazione a volume costante è data dalla parte deviatoria del tensore $\underline{\underline{e}}$, velocità di deformazione (vedi equazione (9)):

$$\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}})\underline{\underline{I}}$$

si tratta di un tensore simmetrico a traccia nulla. Stabilire una relazione costitutiva isotropa implica che questo tensore debba essere legato alla sollecitazione da una funzione scalare; il fatto poi che la relazione sia lineare ci dice che questo legame deve essere costituito da una costante moltiplicativa la quale, per l'ipotesi di fluido omogeneo, è uguale in tutti i punti del campo. Avremo quindi un'equazione costitutiva del tipo:

$$\text{Sollecitazione} = \text{cost} \cdot \left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}})\underline{\underline{I}} \right);$$

È immediato osservare che, essendo il tensore a secondo membro una parte deviatoria, anche a primo membro non potrà che comparire la parte deviatoria del tensore delle tensioni. Se indichiamo con 2μ la costante moltiplicativa avremo dunque:

$$\underline{\underline{\tau}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}})\underline{\underline{I}} = 2\mu \left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}})\underline{\underline{I}} \right); \quad (55)$$

ovvero:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \left[\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}} \right] \quad (56)$$

la quale rappresenta l'equazione costitutiva per i fluidi newtoniani (Stokes, 1845).

Il coefficiente μ , detto *viscosità dinamica* del fluido è, in generale funzione della temperatura. Le sue dimensioni sono: $[M][L^{-1}][T^{-1}] = [F][L^{-2}][T^{-1}]$, e per l'acqua vale:

$$\mu(\theta) = \frac{0.001785}{1 + 0.337 \cdot \theta + 0.000221 \cdot \theta^2} (\text{N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}) \quad (57)$$

con la temperatura, θ , espressa in $^{\circ}\text{C}$. A 20°C si ha: $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$. Per l'aria, sempre a 20°C , la viscosità è: $\mu = 1.808 \cdot 10^{-5} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$.

2.3. Equazioni di Navier-Stokes

Introdotta l'equazione costitutiva in quella di Cauchy, supponendo che il coefficiente di viscosità μ sia costante, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(-p - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = \\ &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (58)$$

Dividendo per ρ e ricordando l'equazione di continuità, (26), si ricava l'*equazione di Navier-Stokes* per fluidi incomprimibili (Stokes, 1845):

$$\frac{Du_i}{Dt} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (59)$$

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}}$$

avendo indicato con $\nu = \mu/\rho$ la *viscosità cinematica*.

2.3.1. Equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale

Per poter adimensionalizzare le equazioni Navier-Stokes è necessario innanzitutto scegliere 3 grandezze indipendenti fondamentali attraverso le quali sia possibile esprimere tutte le altre. Si deve poi scegliere una scala per ciascuna grandezza fondamentale. Nel nostro caso, una buona scelta può essere quella di considerare una scala delle velocità, U , una scala delle lunghezze, L , ed una scala delle densità ρ_0 . Attraverso queste tre scale possiamo adimensionalizzare le grandezze in gioco.

Consideriamo l'equazione di Navier-Stokes scritta nel caso in cui le uniche forze di massa siano quelle dovute al campo gravitazionale, $\mathbf{f} = -\nabla g z$, (z ascissa verticale diretta verso l'alto):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = -\nabla g z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (60)$$

attraverso le scale scelte possiamo scrivere le grandezze adimensionali:

$$x_i^* = x_i / L; \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} / U; \quad \rho^* = \rho / \rho_0; \quad p^* = p / (\rho_0 U^2); \quad t^* = t / (L / U).$$

Per esprimere le derivate in forma adimensionale ricordiamo che essendo esse operatori lineari si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{(L/U)} \frac{\partial}{\partial t^*}$$

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla^* \quad (61)$$

Se sostituiamo nell'equazione precedente:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} \frac{U^2}{L} + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^* \frac{U^2}{L} = -\nabla^* g z^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* \frac{U^2}{L} + \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \frac{U}{L^2} \quad (62)$$

e, dividendo entrambi i membri per U^2 / L , si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^* = -\frac{gL}{U^2} \nabla^* z^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{\nu}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (63)$$

nella quale possono essere riconosciuti 2 gruppi adimensionali:

$$\text{numero di Reynolds:} \quad R_e = \frac{UL}{\nu}$$

$$\text{numero di Froude} \quad F_r = \sqrt{\frac{U^2}{gL}}$$

che ci permettono di giungere alla forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{F_r^2} \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (64)$$

nella quale, per semplicità, sono stati omessi gli asterischi che indicano le grandezze adimensionali. Questa forma dell'equazione si presta anche alla interpretazione del significato dei gruppi adimensionali sopra identificati. Supponiamo infatti di aver scelto le scale delle grandezze in modo tale che tutte le grandezze adimensionali, nell'ambito del problema che stiamo considerando, siano di ordine 1, così come le loro derivate adimensionali. Nell'equazione precedente tutti i termini risultano di ordine 1 tranne i due gruppi adimensionali che possono invece assumere un valore qualunque.

Valutando l'ordine di grandezza del numero di Reynolds possiamo stimare quanto importante sia l'ultimo termine, legato alla presenza della viscosità, rispetto al termine a primo membro (che è un termine inerziale). Quindi il numero di Reynolds può essere interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze viscosi. In particolare se $R_e \rightarrow \infty$ il termine viscoso sarà trascurabile: la viscosità non influenza in modo significativo il fenomeno che si sta studiando.

L'ordine di grandezza del numero di Froude fornisce invece informazioni sull'ordine di grandezza del termine gravitazionale, e può essere quindi interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze gravitazionali. Analogamente al caso precedente, se $F_r \rightarrow \infty$ il termine dovuto alle forze gravitazionali può essere trascurato: la presenza della gravità non influenza in modo significativo il nostro fenomeno. In conclusione si può affermare che, se si fa una scelta oculata delle scale di un fenomeno, la valutazione dei due numeri adimensionali permette di valutare quale sia l'importanza della viscosità e della forza gravitazionale e sotto che condizioni queste possano essere eventualmente trascurate nella trattazione.

2.3.2. Flussi paralleli

Solo in casi particolari si può trovare una soluzione della equazione di Navier-Stokes in forma analitica; un caso particolarmente interessante è quello dei flussi paralleli. E' definito flusso parallelo quello in cui due componenti della velocità sono in tutto il campo uguali a zero:

$$u_1 \neq 0; \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (65)$$

Nelle ipotesi di:

- fluido incomprimibile;
- condizioni stazionarie;
- forze di massa gravitazionali: $\mathbf{f} = -\nabla(gz)$, con z ascissa verticale diretta verso l'alto,

l'equazione del bilancio di massa, (26), dà:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad (66)$$

quindi la u_1 è funzione di x_2 e di x_3 ; proiettando le equazioni di Navier-Stokes sui tre assi, si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\ 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \\ 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \end{cases} \quad (67)$$

Introduciamo la quantità $h = p/\gamma + z$, detta *carico piezometrico*, con $\gamma = \rho g$ *peso specifico* del fluido; si può concludere, osservando la seconda e la terza delle (67), che h non è funzione né di x_2 né di x_3 e dunque risulta essere funzione unicamente di x_1 . La sua derivata, cambiata di segno, viene indicata con $i = -\partial h/\partial x_1$, e prende il nome di *pendenza piezometrica*. Il moto del fluido avviene nel senso dei carichi piezometrici decrescenti e quindi con pendenza piezometrica positiva.

Nel caso bidimensionale piano (*moto di Couette*), in cui tutto è uniforme anche in direzione x_3 , si ha:

$$h = h(x_1); \quad u_1(x_2), \quad (68)$$

quindi:

$$-ig = \nu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2}. \quad (69)$$

Il primo membro è funzione della sola x_1 , il secondo membro è funzione della sola x_2 , per poter verificare tale relazione in tutti i punti del campo entrambi i membri devono essere costanti. Integrando due volte si ha:

$$\frac{du_1}{dx_2} = \left(\frac{-g}{v} \frac{dh}{dx_1} \right) x_2 + k_1; \quad (70)$$

$$u_1 = \left(\frac{-gi}{v} \right) \frac{x_2^2}{2} + k_1 x_2 + k_2$$

si ottiene una relazione che mostra come la distribuzione delle velocità all'interno del campo sia di tipo parabolico.

Le relazioni ottenute possono essere applicate al flusso che scorre fra due piastre distanti b ; nel caso in cui le piastre siano ferme, le condizioni al contorno sono (Figura 10):

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = 0 \quad (71)$$

dalle quali si determinano i valori di k_1 e k_2 ottenendo:

$$u_1(x_2) = \left(\frac{-ig}{2v} \right) (x_2 - b)x_2. \quad (72)$$

Nella direzione c_1 relativamente ad una superficie con normale c_2 , ricordando l'equazione costitutiva, lo sforzo di taglio è dato da:

$$\tau_{12} = 2\mu e_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -i\gamma \left(x_2 - \frac{b}{2} \right) \quad (73)$$

Alle pareti risulta:

$$\tau_{12}(x_2 = 0) = \frac{1}{2} i\gamma b;$$

$$\tau_{12}(x_2 = b) = -\frac{1}{2} i\gamma b. \quad (74)$$

Lo sforzo di taglio alla parete è legato alla pendenza piezometrica che bilancia la forza viscosa.

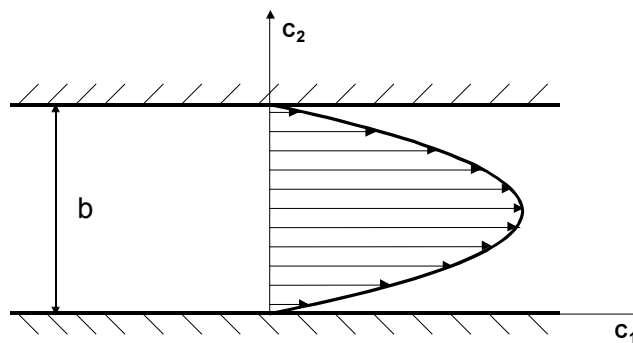


FIGURA 10

Nel caso in cui si abbia invece una parete mobile che scorre con velocità V parallelamente a se stessa, si hanno le seguenti condizioni al contorno:

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = V \quad (75)$$

che permettono di valutare i valori delle costanti:

$$u_1 = \frac{-ig}{2\nu} \frac{x_2^2}{2} + \left(\frac{V}{b} + \frac{igb}{2\nu} \right) x_2 \quad (76)$$

La distribuzione delle velocità è ottenuta dalla somma di un termine parabolico e di un termine lineare. Quest'ultimo è quello che si avrebbe nel caso in cui una delle due piastre si muovesse parallelamente a se stessa con velocità V in assenza di gradiente di pressione (Figura 11).

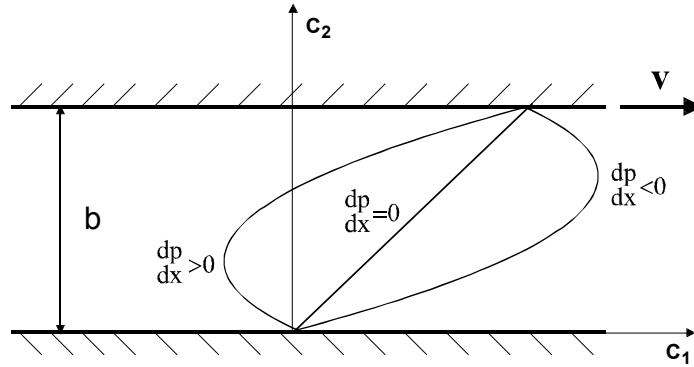


FIGURA 11

2.4. Equazione dell'energia meccanica

Consideriamo un fluido immerso in un campo gravitazionale, abbiamo visto che l'equazione di Navier-Stokes si può scrivere:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla gz - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (77)$$

e quindi portando la densità, costante, sotto il segno di gradiente, e raccogliendo a fattor comune una g :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = -g \nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (78)$$

La derivata materiale che compare a primo membro può essere espressa in modo diverso applicando la formula del doppio prodotto vettoriale:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (79)$$

alla i -esima componente del prodotto $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$:

$$(\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))_i = u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = (\mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u})_i \quad (80)$$

ovvero:

$$(\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = \mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

L'espressione della derivata materiale diventa quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (81)$$

Sostituendo la (81) nella (78) e raggruppando i termini sotto gradiente si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + g \nabla \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + v \nabla^2 \mathbf{u} \quad (82)$$

La quantità tra parentesi tonde rappresenta l'energia meccanica per unità di peso associata al fluido ed è indicata con H ed è chiamata *carico totale*. Questa equazione rappresenta dunque l'*equazione dell'energia meccanica* per un fluido incomprimibile, soggetto al campo gravitazionale:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + g \nabla H = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + v \nabla^2 \mathbf{u}}. \quad (83)$$

Il carico totale, ricordando la definizione di carico piezometrico, $h = z + p/\gamma$, risulta:

$$\boxed{H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{u^2}{2g}}.$$

Consideriamo infine il caso di flussi stazionari nei quali sia trascurabile il termine viscoso rispetto agli altri: il primo termine a primo membro e l'ultimo termine a secondo membro della (83) sono entrambi nulli. Se si annulla anche il termine con la vorticità allora l'equazione non fa altro che stabilire la conservazione dell'energia meccanica ($\nabla H = \mathbf{0}$). In effetti si presentano due casi diversi che conducono a prevedere un valore di H costante:

1. Nel caso di flusso *irrotazionale* $\boldsymbol{\omega} = (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, il primo termine a secondo membro è banalmente nullo e quindi l'equazione (83) si riduce alla forma nota come *teorema di Bernoulli*:

$$\nabla H = 0 \quad (84)$$

il quale, in questa formulazione afferma che: *nel caso di un flusso stazionario, ed irrotazionale, con viscosità trascurabile, il carico totale si mantiene costante in tutto il campo.*

2. Se si osserva che il prodotto vettoriale è sempre ortogonale ad entrambi i fattori, si conclude immediatamente che il termine $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ è sempre ortogonale ad \mathbf{u} (e quindi alle linee di corrente). Quindi, *proiettando lungo una linea di corrente* l'equazione dell'energia meccanica il primo termine a secondo membro non dà alcuna componente, quindi otteniamo un'altra forma del Teorema di Bernoulli (formulato da Daniel Bernoulli come principio nel 1738):

$$\nabla H \cdot \mathbf{i}_s = \frac{\partial H}{\partial s} = 0, \quad (85)$$

la quale afferma che *in un flusso stazionario, nel caso si possa trascurare la viscosità, il carico totale si mantiene costante lungo le linee di corrente.*

3. IDROSTATICA

Natura non rompe sua legge.

3.1. Distribuzione delle pressioni all'interno di un liquido pesante in quiete

Un fluido si trova in quiete (condizione idrostatica) se esiste un sistema di riferimento inerziale rispetto al quale la velocità e l'accelerazione del fluido sono ovunque nulle. Supporremo che il fluido sia un liquido incompressibile e che l'unica forza di massa agente sia la forza peso dotata di potenziale $-gz$ per cui:

$$\mathbf{f} = -\nabla gz \quad (86)$$

essendo z la quota geodetica di un generico punto.

Se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ l'equazione costitutiva (56) si riduce a $\underline{\boldsymbol{\tau}} = -p \underline{\mathbf{I}}$, quindi gli sforzi sono ovunque solo normali e coincidono con la pressione. Inoltre l'equazione di Navier-Stokes dà in questo caso:

$$\nabla \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) = \mathbf{0}$$

quindi all'interno del fluido il carico piezometrico h è costante:

$$\boxed{\frac{p}{\rho g} + z = h = \text{cost}} \quad (87)$$

È consuetudine scegliere l'origine delle pressioni in modo che la pressione si annulli in corrispondenza della pressione atmosferica; si indica quindi con p la pressione relativa riferita alla pressione atmosferica p_{atm} assunta come pressione di riferimento:

$$p = p_{\text{ass}} - p_{\text{atm}}$$

Sarà, d'ora in poi, fatto esplicito riferimento nel caso in cui si intenda parlare di pressione assoluta invece che relativa. L'equazione (87) mostra che le superficie isobare sono dei piani orizzontali.

La superficie, interna od esterna al fluido, in cui la pressione assoluta è uguale alla pressione atmosferica è il *piano dei carichi idrostatici* (pci). Il piano dei carichi idrostatici coincide, ove esista, con la superficie di separazione tra liquido ed atmosfera. La superficie in cui la pressione assoluta è nulla è il *piano dei carichi assoluti* (pca). La pressione relativa in un generico punto del fluido (Figura 12) è data dal prodotto del peso specifico, $\gamma = \rho g$, per la differenza di quota tra il piano dei carichi idrostatici ed il punto in esame. Questa differenza di quota prende il nome di *affondamento* ed sarà indicata con ζ :

$$p = \gamma \zeta \quad (88)$$

Analogamente la pressione assoluta è pari al prodotto del peso specifico per la differenza di quota tra il piano dei carichi assoluti ed il punto medesimo. Il rapporto p/γ , che ha le dimensioni di una lunghezza, è l'*altezza rappresentatrice della pressione*.

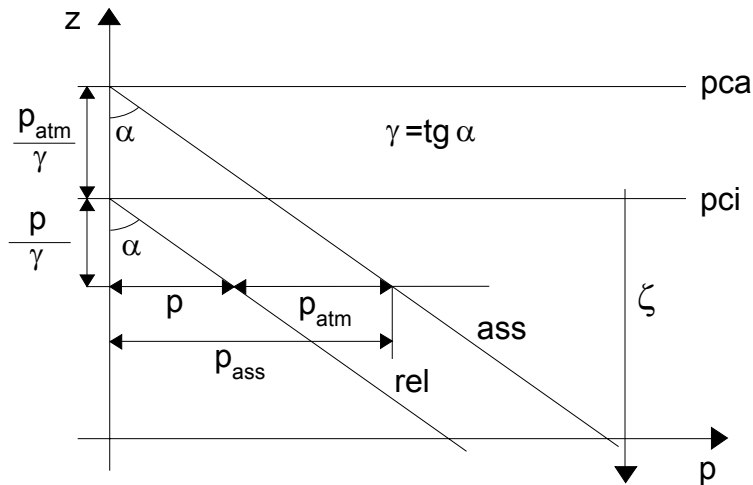


FIGURA 12

Si considerino due punti A_1 e A_2 all'interno del fluido; risulta:

$$\frac{p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2}{\gamma} + z_2.$$

Se si produce una variazione di pressione Δp_1 nel punto A_1 risulta:

$$\frac{p_1 + \Delta p_1}{\gamma} + z_1 = \frac{p_2 + \Delta p_2}{\gamma} + z_2$$

da cui:

$$\boxed{\Delta p_1 = \Delta p_2} \tag{89}$$

quindi le variazioni di pressione sono uguali in tutti i punti del fluido (*legge di Pascal*).

Nella superficie di separazione di due liquidi, non miscibili di densità differente $\rho_2 > \rho_1$, le pressioni sono uguali:

$$\nabla p = -\rho_1 g \mathbf{k}; \quad \nabla p = -\rho_2 g \mathbf{k};$$

con \mathbf{k} versore dell'asse verticale. Proiettando lungo la direzione verticale:

$$\begin{aligned} dp &= -\rho_1 g dz = -\rho_2 g dz \\ (\rho_1 - \rho_2) dz &= 0 \end{aligned} \tag{90}$$

quindi essendo $\rho_1 \neq \rho_2$ la superficie di separazione tra i due liquidi deve essere una superficie orizzontale.

In Figura 13 è riportato l'andamento delle pressioni all'interno dei due liquidi pesanti. Sia b lo spessore del liquido di peso specifico inferiore ed a la distanza del piano dei carichi del secondo

liquido dalla superficie di separazione, risulta:

$$a\gamma_2 = b\gamma_1 \Rightarrow a = b \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

A partire dall'affondamento rispetto a p_{cr1} e p_{cr2} è possibile valutare la pressione nei punti all'interno dei due liquidi. In modo analogo si trovano le posizioni dei piani di carico relativo in presenza di più liquidi pesanti non miscibili.

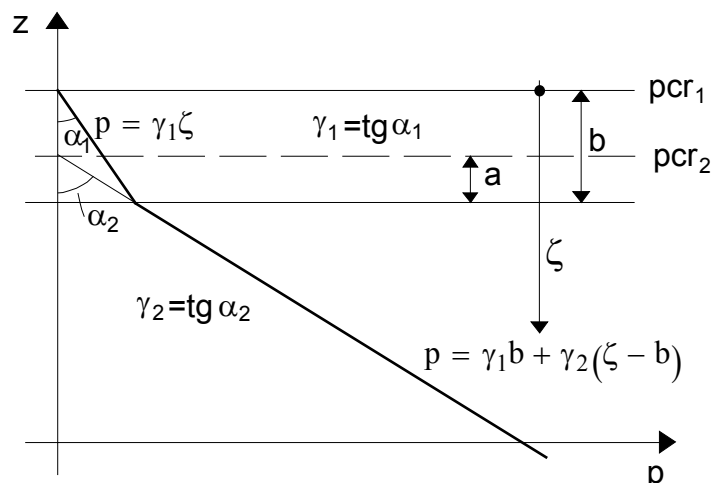


FIGURA 13

3.2. Spinte su superficie in condizioni idrostatiche

Il problema fondamentale dell'idrostatica è quello di calcolare gli effetti delle pressioni che un liquido esercita su di una superficie. Se una superficie è a contatto con un liquido, in ogni suo elementino infinitesimo, dS , agirà una forza elementare diretta come la normale alla superficie e di modulo pari alla pressione moltiplicata per l'areola dS :

$$d\mathbf{f} = p \mathbf{n} dS$$

Questo sistema di forze è descritto in modo completo se conosciamo la sua risultante ed il suo momento risultante. Si definisce spinta idrostatica sulla superficie S la forza, $\mathbf{\Pi}$, che il liquido che si trova sulla faccia positiva esercita su quella che si trova sulla faccia negativa di S :

$$\mathbf{\Pi} = \int_S p \mathbf{n} dS = \int_S (\gamma \zeta) \mathbf{n} dS; \quad (91)$$

mentre il momento risultante, calcolato rispetto all'origine, è:

$$\mathbf{K} = \int_S \mathbf{x} \times (p \mathbf{n}) dS = \int_S \mathbf{x} \times (\gamma \zeta \mathbf{n}) dS \quad (92)$$

Per rappresentare i momenti generati dal sistema di pressioni è possibile fare riferimento, invece che al momento risultante, alla retta d'azione del sistema di forze, definita come quella retta lungo la quale deve agire la risultante, $\mathbf{\Pi}$, per determinare un momento, rispetto all'origine, pari a \mathbf{K} .

3.2.1. Spinte su superficie piane

Nel caso di superficie piane conviene utilizzare un sistema di riferimento cartesiano che abbia un asse orizzontale e giacente sulla superficie (asse y) e l'altro, ortogonale al primo e giacente sul piano, risulta essere lungo una linea di massima pendenza (asse x); il terzo asse invece è diretto come la normale (Figura 14). Su ogni elementino, dS, della superficie agisce una forza diretta come la normale **n** e di modulo pari alla pressione per l'area dell'elementino: p**n** dS; anche la risultante, **Π**, sarà dunque orientata secondo la normale alla superficie e varrà:

$$\boxed{\mathbf{\Pi} = \int_S p \mathbf{n} dS = \int_S \gamma \zeta dS \mathbf{n} = \Pi_n \mathbf{n}} \quad (93)$$

Π_n rappresenta, da un punto di vista geometrico, il volume di un solido che ha per base la superficie e per altezza, in ogni punto, la pressione p, detto *solido delle pressioni**.

Oltre alla risultante, per caratterizzare il sistema di forze generato dal fluido sulla superficie considerata, è necessario calcolare il momento risultante. Nel sistema di riferimento scelto per questa trattazione risultano diverse da zero solo due componenti:

$$\begin{cases} K_x = \int_S p y dS \\ K_y = \int_S p x dS \end{cases} \quad (94)$$

Per individuare la retta d'azione è consuetudine far riferimento al cosiddetto *centro di spinta*, il quale è definito come quel punto della superficie nel quale occorre applicare la risultante per ottenere un momento pari a quello generato dal sistema stesso. Ponendo questa condizione,

$$\begin{cases} \Pi_n x_c = K_y = \int_S x \gamma \zeta dS \\ \Pi_n y_c = K_x = \int_S y \gamma \zeta dS \end{cases}$$

è possibile ricavare l'espressione delle sue coordinate:

$$\boxed{\begin{cases} x_c = \frac{1}{\Pi_n} \int_S p x dS = \frac{1}{\Pi_n} \int_S \gamma \zeta x dS \\ y_c = \frac{1}{\Pi_n} \int_S p y dS = \frac{1}{\Pi_n} \int_S \gamma \zeta y dS \end{cases}} \quad (95)$$

Sempre nell'interpretazione geometrica introdotta precedentemente, se si osserva che Π_n è il volume del solido delle pressioni, le equazioni precedenti possono essere lette anche come l'espressione delle coordinate del baricentro di tale volume. Quindi, per conoscere la posizione del centro di spinta è sufficiente calcolare le coordinate del centro di figura, C, del solido delle pressioni (Figura 14).

* questa figura, nel caso si abbia a che fare con un solo liquido ($\gamma = \text{cost.}$) è anche detta *prisma di spinta*

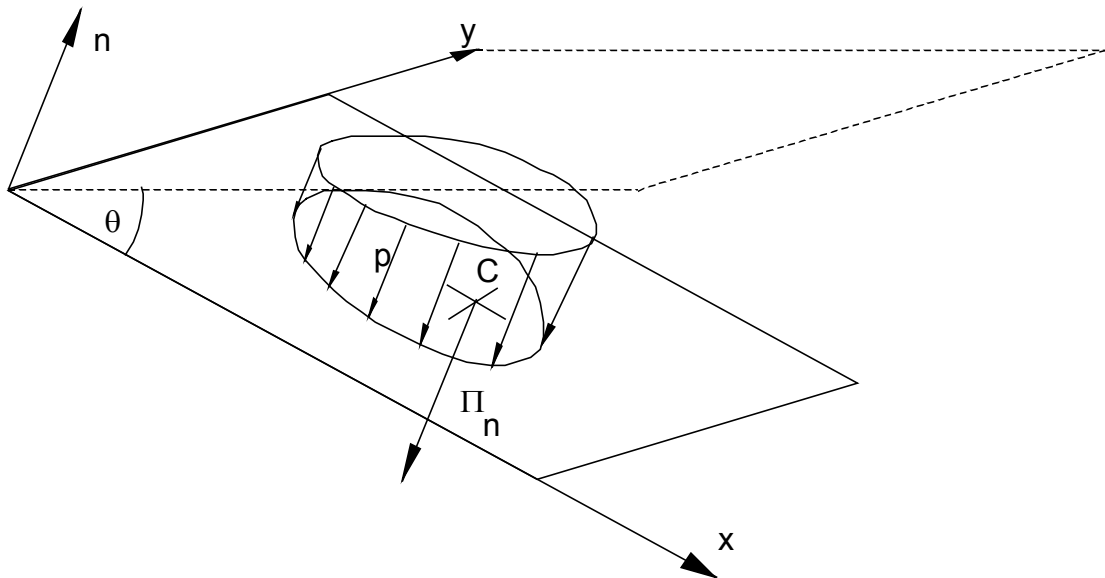


FIGURA 14

Nel caso la spinta sia dovuta ad un solo liquido e quindi il peso specifico γ sia costante, è possibile introdurre una ulteriore interpretazione delle espressioni della spinta e del centro di spinta, basata sulle caratteristiche geometriche non del volume di spinta ma della superficie stessa sulla quale la spinta viene esercitata. Essendo γ costante, può essere portata fuori dal segno di integrale nell'espressione della spinta, la quale può quindi essere riscritta come:

$$\Pi_n = \gamma \int_S \zeta dS = \gamma \zeta_g S = p_g S$$

ovvero la risultante eguaglia il prodotto della pressione, p_g , calcolata all'affondamento, ζ_g , del centro di figura della superficie, moltiplicata per l'area della superficie stessa.

Per riscrivere l'espressione delle coordinate del centro di spinta è necessario notare, oltre al fatto che γ è costante che, nel sistema di riferimento scelto, la coordinata x e l'affondamento ζ sono legati dalla relazione:

$$\zeta = x \sin \theta;$$

essendo θ l'angolo formato tra il piano dei carichi idrostatici e quello che contiene la superficie (Figura 14). Alla luce di questa osservazione le (95) possono essere riscritte come:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{\int_S [\gamma(x \sin \theta)x] dS}{\int_S \gamma(x \sin \theta) dS} = \frac{\int_S x^2 dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{xx}}{M_x} \\ y_c = \frac{\int_S [\gamma(x \sin \theta)y] dS}{\int_S \gamma(x \sin \theta) dS} = \frac{\int_S xy dS}{\int_S x dS} = \frac{I_{xy}}{M_x} \end{array} \right. ;$$

nelle quali I_{xx} rappresenta il momento d'inerzia della superficie S rispetto alla retta di sponda, I_{xy} il momento misto rispetto all'asse x ed y e $M_x = x_g S$ il momento statico rispetto alla retta di sponda. Per mezzo del teorema di Huygens, che consente di esprimere i momenti d'inerzia rispetto a assi generici, mediante i momenti baricentrici:

$$\begin{cases} I_{xx} = x_g^2 S + I_{gxx} \\ I_{xy} = x_g y_g S + I_{gxy} \end{cases}$$

possiamo giungere ad una espressione delle coordinate del centro di spinta in funzione di quantità baricentriche:

$$\begin{cases} x_c = \frac{I_{xx}}{x_g S} = x_g + \frac{I_{gxx}}{M_x} \\ y_c = \frac{I_{xy}}{x_g S} = y_g + \frac{I_{gxy}}{M_x} \end{cases} \quad (96)$$

le quali possono essere lette asserendo che il centro di spinta è spostato rispetto al baricentro di una quantità pari al rapporto tra il momento d'inerzia baricentrico ed il momento statico rispetto alla retta di sponda. La prima delle due espressioni permette inoltre di osservare che, essendo x_g incrementata di una quantità definita positiva, ed essendo l'asse x orientato verso il basso, il centro di spinta si troverà sicuramente più in basso del baricentro della superficie S.

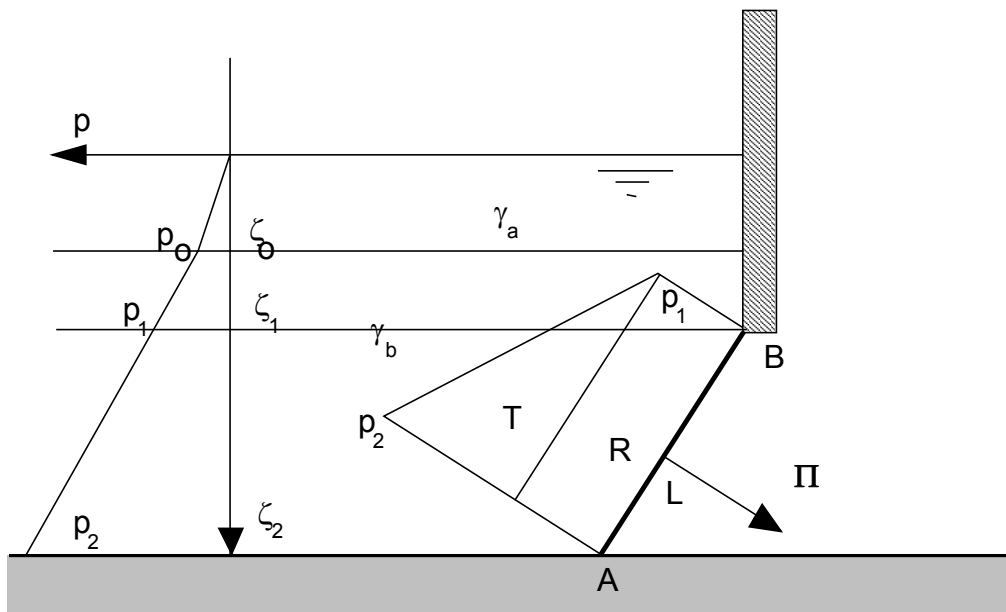


FIGURA 15

Si voglia calcolare, a titolo di esempio, la spinta sulla paratoia AB, di lunghezza L e profondità unitaria, determinata dalla sovrapposizione di due liquidi a densità diversa, γ_a e γ_b , che si trovano alla sua sinistra. L'andamento della pressione in funzione dell'affondamento, ζ , è rappresentato sulla sinistra dello schema di Figura 15, la pressione aumenta più rapidamente nel liquido sottostante, che ha densità maggiore. Per il calcolo del volume del prisma di spinta, tenuto conto che esso è di profondità unitaria nella direzione ortogonale al foglio avremo che:

- all'interfaccia tra i due liquidi la pressione vale $p_0 = \gamma_a \zeta_0$;
- nel punto B della paratoia, di affondamento ζ_1 , la pressione vale $p_1 = p_0 + \gamma_b (\zeta_1 - \zeta_0)$;
- nel punto A della paratoia, di affondamento ζ_2 , la pressione vale $p_2 = p_0 + \gamma_b (\zeta_2 - \zeta_0)$;
- essendo la densità costante tra gli affondamenti ζ_1 e ζ_2 , la pressione varia linearmente tra A e B;

di conseguenza il solido delle pressioni, costruito sulla paratoia, è un trapezio rettangolo. La spinta

per unità di lunghezza è data dall'area di questo trapezio:

$$\Pi_n = \frac{1}{2} (p_1 + p_2) L \quad (97)$$

mentre il centro di spinta si trova nel baricentro di tale figura. Per calcolarne la posizione si può dividere il trapezio in un rettangolo, R, di area $A_R = p_1 L$, ed un triangolo, T, di area $\frac{1}{2}(p_2 - p_1) L$. Il baricentro si trova come media pesata delle posizioni dei baricentri delle due figure. Avremo:

- baricentro del triangolo: $x_{gT} = \frac{2}{3} L$;
- baricentro del rettangolo: $x_{gR} = \frac{1}{2} L$;

da cui, essendo l'area del trapezio proprio Π_n , la posizione del baricentro del solido delle pressioni risulta:

$$x_g = \frac{x_{gT} A_T + x_{gR} A_R}{\Pi_n} \quad (98)$$

la quale rappresenta l'espressione cercata per la posizione del centro di spinta.

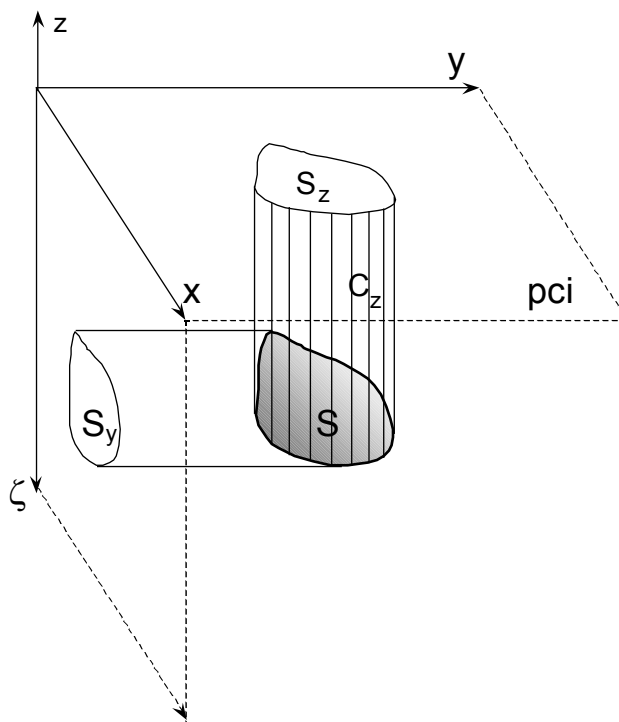


FIGURA 16

3.2.2. Spinte su superficie curve

Si consideri una superficie S all'interno del liquido. Attraverso la normale \mathbf{n} alla superficie è possibile identificare una faccia positiva ed una negativa.

Le componenti della spinta risultante su di un sistema di assi cartesiani che abbia l'asse z verticale, diretto verso l'alto sono:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi_x = \int_S p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_x) dS = \int_S p dS_x = \int_{S_x} \gamma \zeta dS \\ \Pi_y = \int_S p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_y) dS = \int_S p dS_y = \int_{S_y} \gamma \zeta dS \\ \Pi_z = \int_S p(\mathbf{n} \cdot \mathbf{i}_z) dS = \int_S p dS_z = \int_{S_z} \gamma \zeta dS \end{array} \right. \quad (99)$$

Infatti moltiplicare scalarmente $\mathbf{n} dS$ per un generico versore \mathbf{i} , corrisponde a proiettare la superficie dS su di un piano che ha \mathbf{i} per normale.

Le (99) ci dicono che il sistema di pressioni sulla superficie curva è equivalente a 3 sistemi di pressioni. I primi due agiscono sulle superficie piane verticali S_x ed S_y , proiezione della superficie S su di un piano che ha per normale x o y , rispettivamente (Figura 16). Il terzo sistema di forze si calcola invece osservando che nell'integrale che esprime Π_z , dS corrisponde alla base e ζ corrisponde all'altezza di un elementino del volume di un prisma, C_z , a generatrici verticali, compreso tra la superficie ed il piano dei carichi idrostatici. Integrando su S_z , che è la base del prisma, e moltiplicando per γ si ottiene il peso di tale prisma. La retta d'azione di questo sistema di forze ha la direzione della risultante e passa per il baricentro di detto cilindro. Per determinare se la spinta sarà diretta verso l'alto o verso il basso, è necessario confrontare la direzione della normale \mathbf{n} con quella del versore, \mathbf{i}_z , dell'asse z : se formano un angolo minore di $\pi/2$ il prodotto scalare tra loro sarà positivo e quindi la spinta sarà diretta verso l'alto (concordemente all'asse z), nel caso invece l'angolo formato tra i due versori superi $\pi/2$, il prodotto scalare darà risultato negativo e la spinta sarà diretta discordemente all'asse z , cioè verso il basso (Figura 17). Considerazioni analoghe permettono di determinare se le componenti orizzontali della spinta sono concordi o meno agli assi. Si ottiene quindi, in generale, un sistema di 3 forze, con rette d'azione sghembe, che vanno composte tra loro per giungere all'espressione della risultante e del momento risultante.

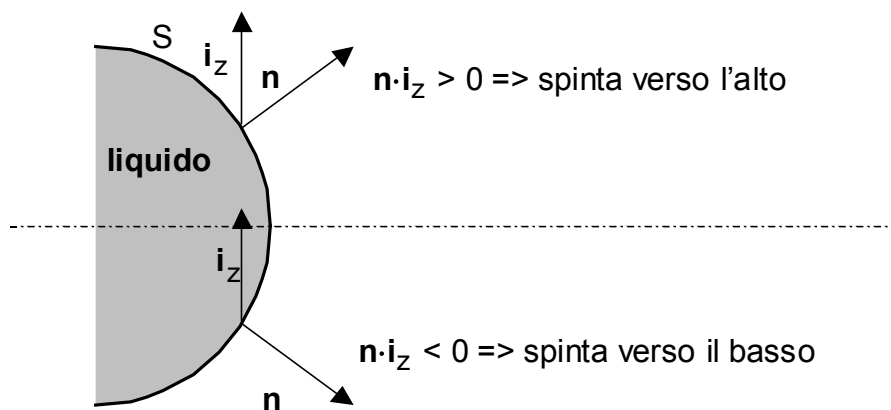


FIGURA 17

Utilizzando le regole ora descritte è possibile evincere che le pareti della superficie che incontrano un numero pari di volte una retta orizzontale non contribuiscono alla spinta orizzontale. Quindi su di una superficie chiusa la risultante orizzontale della spinta è nulla. Se invece una superficie è attraversata più volte da una retta verticale si può suddividere la superficie stessa in parti che siano attraversate una sola volta e sommare algebricamente i contributi dovuti alle singole

parti. Se si ha a che fare con una superficie chiusa si ottiene con questo procedimento la legge di Archimede: un corpo immerso in un fluido riceve una spinta verso l'alto pari al peso di un volume di fluido uguale al volume del corpo stesso.

I ragionamenti fatti in precedenza propongono dei metodi di calcolo della risultante in alcuni casi di comune applicazione, bisogna osservare però che in molti casi è possibile calcolare la spinta di una superficie applicando l'equazione globale della quantità di moto (36) ad un opportuno volume di controllo. Nel caso idrostatico $\mathbf{I} = \mathbf{0}$, inoltre l'annullarsi del campo di velocità fa sì che anche il flusso di quantità di moto sia nullo: $\mathbf{M} = \mathbf{0}$. L'equazione globale si riduce quindi a:

$$\boxed{\boldsymbol{\Pi} + \mathbf{G} = \mathbf{0}} \quad (100)$$

la quale, in questa forma, è detta *equazione globale dell'idrostatica*.

Si consideri, a titolo di esempio, il serbatoio cilindrico, chiuso da due calotte semisferiche di Figura 18, e riempito di un fluido pesante. Per determinare la spinta che il fluido esercita su una delle due calotte si applica l'equazione globale al volume V_c :

$$\boldsymbol{\Pi}_1 + \boldsymbol{\Pi}_2 + \mathbf{G} = \mathbf{0}$$

nella quale il primo termine rappresenta la spinta che la calotta esercita sul fluido, ed è quindi uguale ed opposto alla spinta, S , che il fluido esercita sulla calotta, il secondo è la risultante delle pressioni sulla superficie di divisione tra calotta e cilindro ed il terzo rappresenta il peso del fluido contenuto nel volume di controllo. Sostituendo $S = -\boldsymbol{\Pi}_1$ si ottiene l'espressione vettoriale per la spinta cercata:

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\Pi}_2 + \mathbf{G}.$$

La retta d'azione \mathbf{S} dovrà passare per il centro della semicirconferenza, C , poiché è risultante di azioni elementari sulla superficie della calotta le cui rette di azione si intersecano tutte in quel punto.

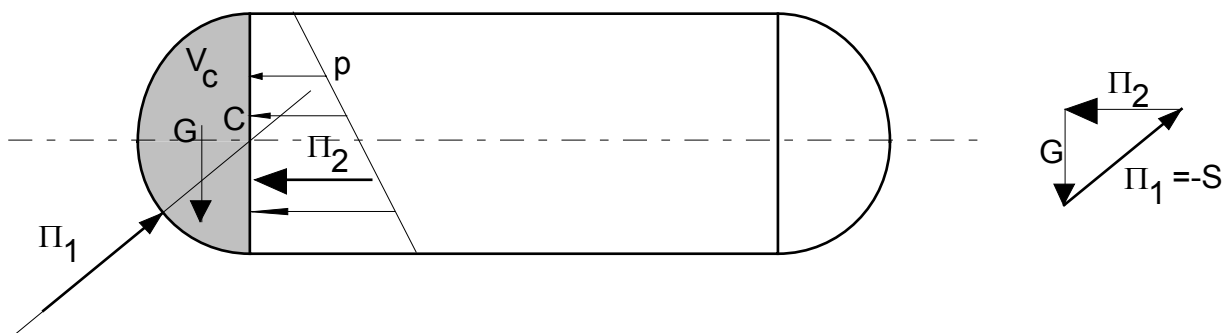


FIGURA 18

3.3. Alcune applicazioni dell'idrostatica

3.3.1. Manometri a liquido

Il manometro a liquido (con liquido manometrico di peso specifico γ_m) schematizzato in Figura 19 è utilizzato per valutare la pressione in un generico punto che si trova alla quota z all'interno di un recipiente. Il carico piezometrico, h , deve essere costante in ciascuno dei due contenitori: quindi una volta noto il carico piezometrico è possibile ricavare la pressione a qualsiasi quota. Consideriamo la sezione S_2 , che interseca i due rami del manometro alla stessa quota z_2 , su due

superficie S_{a2} e S_{b2} . All'equilibrio, la differenza tra la forza esercitata sul ramo a e quella esercitata sul ramo b deve essere bilanciata dalla differenza di peso tra la colonna di liquido manometrico e quella d'acqua comprese tra S_1 ed S_2 , poiché la parte sottostante ad S_1 dà risultante nulla :

$$(p_a - p_b) \Omega = \gamma_m \delta S - \gamma \delta S \quad (101)$$

avendo indicato con Ω la sezione del manometro e con γ il peso specifico del liquido. Nel caso in cui il ramo b del manometro si a contatto con l'atmosfera si ha $p_b = p_{atm}$ e quindi la formula precedente fornisce la pressione relativa nel serbatoio a alla quota z_2 .

La differenza di carico piezometrico tra la superficie S_{a2} e S_{b2} è pari alla differenza di pressione, divisa per γ , essendo $h_a = z_2 + p_a/\gamma$ ed $h_b = z_2 + p_b/\gamma$. Di conseguenza è possibile esprimere la differenza di carico piezometrico tra i due serbatoi:

$$h_a - h_b = \frac{\gamma_m - \gamma}{\gamma} \delta \quad (102)$$

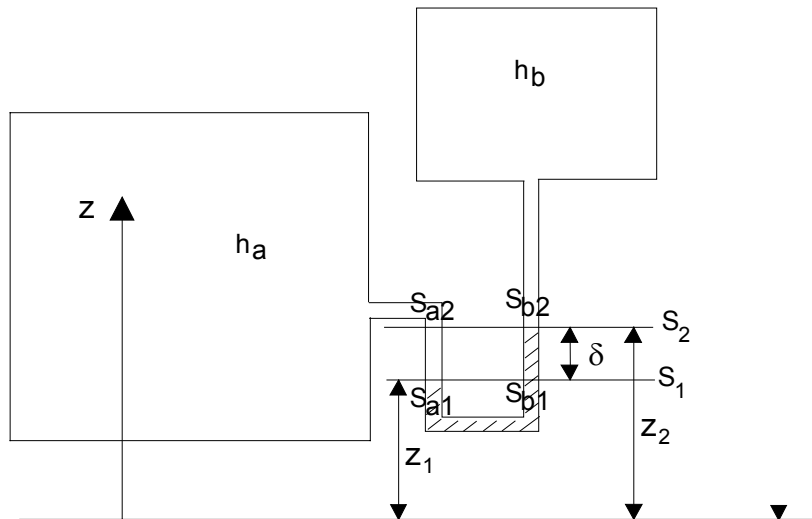


FIGURA 19

3.3.2. Spessore di una condotta circolare

Data una condotta cilindrica con sezione circolare di diametro D e spessore e , si supponga di avere una distribuzione di pressione uniforme p all'interno del condotto. Si consideri un tratto di lunghezza L sezionato secondo un piano diametrale. Risulta (Figura 20):

$$2 \sigma e L = D p L \quad (103)$$

ove σ è lo sforzo, cui è soggetto il materiale solido, che non deve superare il carico di sicurezza del materiale costituente la condotta.

Se σ_{max} è il valore del carico di sicurezza per il materiale scelto per la condotta, si può ricavare lo spessore (*formula di Mariotte*) necessario a sopportare la pressione massima prevista p_{max} :

$$e = \frac{D p_{max}}{2 \sigma_{max}} \quad (104)$$

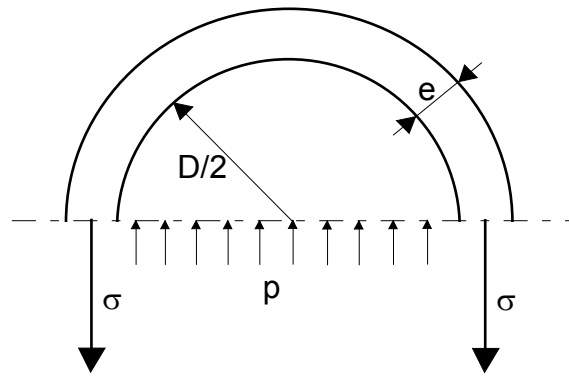


FIGURA 20

4. EQUAZIONI DELLE CORRENTI

Studia prima la scienza, e poi séguita la pratica, nata da essa scienza.

4.1. Flussi quasi-unidimensionali

Nelle applicazioni idrauliche si ha sovente a che fare con flussi dotati di una caratteristica comune: si svolgono fondamentalmente lungo una direzione preferenziale; inoltre, se si escludono alcuni tratti ben identificabili, le variazioni lungo questa direzione sono sufficientemente graduali da poter essere trascurate, in modo da schematizzare il flusso come una successione di moti uniformi lungo tale direzione. In questo modo lo stato del fluido diventa funzione, oltre che del tempo, di una sola variabile spaziale: l'ascissa curvilinea misurata lungo l'asse di questo tubo di fluido (Figura 21).

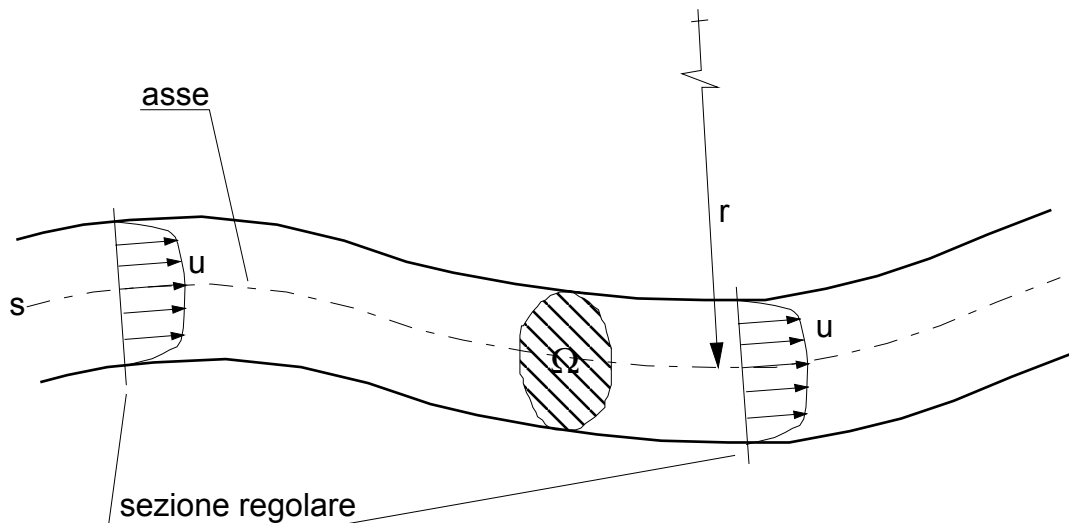


FIGURA 21

Per poter formalizzare le osservazioni sin qui fatte definiamo innanzitutto una *sezione regolare* come una sezione piana che sia normale alla velocità del fluido in ogni punto. Consideriamo un flusso tale che per ogni suo punto passi una ed una sola sezione regolare: potremo allora definire una ascissa curvilinea, s , misurata lungo una curva che sia ortogonale a tutte le sezioni regolari, e che le identifichi univocamente. Tale curva è detta *asse del moto*. Possiamo affermare che questo flusso è *gradualmente variato* se sono soddisfatte le due seguenti condizioni: in ogni suo punto il raggio di curvatura, r , dell'ascissa curvilinea deve essere molto maggiore della dimensione trasversale caratteristica del tubo di flusso nel quale scorre il fluido, $d = \sqrt{\Omega}$, con Ω area della generica sezione regolare:

$$\frac{\sqrt{\Omega}}{r} \ll 1; \quad (105)$$

inoltre la scala spaziale di variazione del fenomeno in direzione dell'ascissa curvilinea deve essere ovunque molto maggiore della dimensione trasversale, imponiamo cioè che non vi siano variazioni di sezione od altre cause di perturbazione del moto, come una transizione da laminare a turbolento, che impongano brusche variazioni del flusso lungo la direzione s .

Un flusso nel quale sia definibile una ascissa curvilinea, nel senso sopra descritto, e che sia gradualmente variato è detto *quasi-unidimensionale* o *corrente fluida gradualmente variata*.

Naturalmente un flusso tra quelli presi ad esempio in precedenza può essere caratterizzato, per alcuni suoi tratti, da moto tridimensionale o da brusche variazioni dell'asse del moto; ciò non impedisce di giungere ad alcuni risultati interessanti. Definiremo allora, semplicemente, *corrente fluida*, un flusso caratterizzato dall'essere localmente quasi-unidimensionale, e di godere quindi delle proprietà sopra descritte, su almeno due sezioni regolari. Nella trattazione che segue imposteremo le equazioni per le correnti sotto le ipotesi di fluido incomprimibile e moto stazionario.

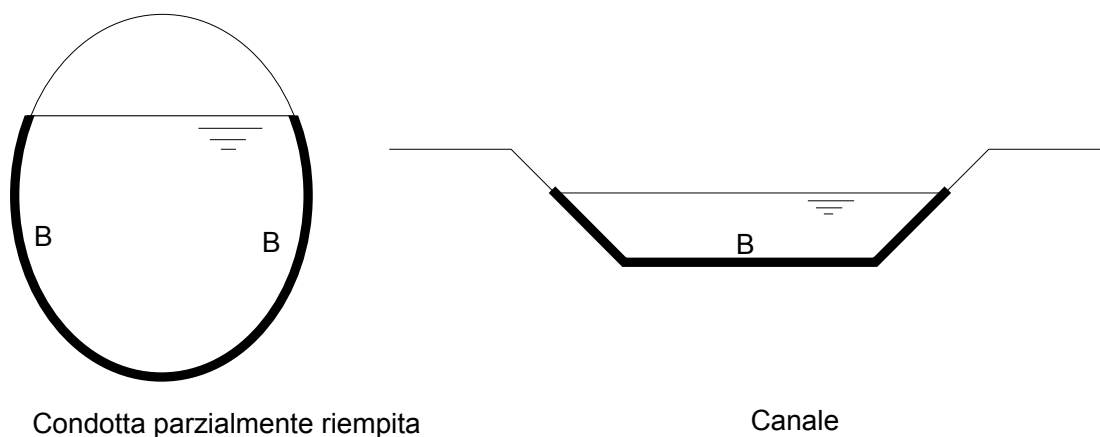


FIGURA 22

Nel caso di principale applicazione per l'idraulica, che il fluido in questione sia un liquido, il contorno delle sezioni regolari può essere a contatto in parte con una superficie solida ed in parte con un aeriforme. La parte di interfaccia tra liquido ed aeriforme è detta *pelo libero*, mentre quella a contatto con una superficie solida è detta *contorno bagnato*. Saranno distinte due grandi classi di problemi, che saranno affrontati separatamente nel seguito: i moti nei quali esiste un pelo libero, ad esempio quello di un liquido in un canale, od in una condotta parzialmente riempita, che sono detti *moti a pelo libero* (Figura 22), ed i moti nei quali l'intero contorno è a contatto con una superficie solida, che sono detti *moti nelle condotte in pressione*.

4.2. Conservazione della massa

Per caratterizzare in modo unidimensionale le correnti dovremo descrivere il flusso in termini di quantità medie. Naturalmente ciò è possibile solo dove il flusso è effettivamente unidimensionale, o quasi-unidimensionale, ovvero sulle sezioni regolari. Questo significa che in effetti noi siamo in grado di descrivere, in questa trattazione, lo stato del fluido solo in corrispondenza delle sezioni regolari, mentre ciò che accade nei tratti di moto tridimensionale dovrà essere considerato solo in forma globale, come effetto netto sulla corrente tra una sezione regolare a monte ed una a valle

della zona di tridimensionalità del moto. Anche le equazioni che esprimono i principi della meccanica dei fluidi andranno quindi riformulate in funzione di queste quantità medie e, per una corrente prenderanno la forma di equazioni di bilancio tra due sezioni regolari, mentre per una corrente gradualmente variata, che ha infinite sezioni regolari, potranno assumere una forma differenziale, che descrive il moto in qualsiasi punto della corrente.

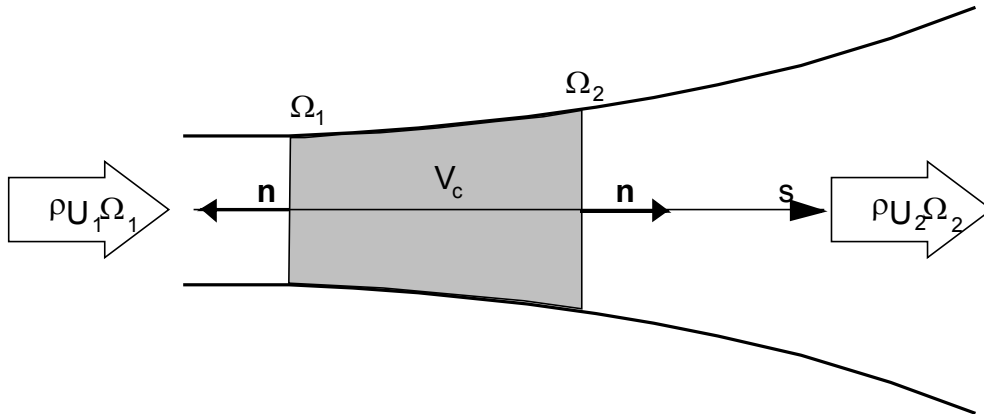


FIGURA 23

Per scrivere l'equazione di bilancio della massa per le correnti sarà sufficiente considerare un volume di controllo, V_c (Figura 23), il quale coincide, al tempo t , con un tronco di corrente delimitato da due sezioni regolari, Ω_1 ed Ω_2 , ed applicare a questo l'equazione globale di conservazione della massa (24). Il flusso di massa totale, Φ_m , attraverso la superficie del volume di controllo può essere scomposto in tre contributi: Φ_L attraverso la superficie laterale, e Φ_1 e Φ_2 attraverso le sezioni Ω_1 ed Ω_2 , rispettivamente. La conservazione della massa, (24), si scriverà dunque:

$$\Phi_m = \Phi_L + \Phi_1 + \Phi_2 = 0. \quad (106)$$

Essendo il moto stazionario, il contorno della corrente non cambia nel tempo, quindi non vi sarà attraverso la superficie laterale nessun flusso di massa ($\Phi_L = 0$). L'equazione precedente si riduce quindi a stabilire che il flusso attraverso la sezione Ω_1 è uguale ed opposto a quello attraverso la sezione Ω_2 :

$$\Phi_1 + \Phi_2 = 0.$$

Se ricordiamo che \mathbf{n} rappresenta la normale uscente dal volume di controllo e che, nell'ipotesi di sezione regolare, \mathbf{u} ed \mathbf{n} hanno la stessa direzione sulle sezioni 1 e 2; quindi avremo $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -u$ sulla sezione 1 dove \mathbf{u} ed \mathbf{n} hanno verso opposto e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = u$ sulla sezione 2, dove \mathbf{u} ed \mathbf{n} sono concordi, possiamo scrivere:

$$\begin{cases} \Phi_1 = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{\Omega_1} \rho u dS \\ \Phi_2 = \int_{\Omega_2} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_2} \rho u dS \end{cases} \quad (107)$$

Per dare una descrizione integrale del fenomeno conviene introdurre la velocità media sulla sezione regolare:

$$\boxed{U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u dS}; \quad (108)$$

definiamo inoltre *portata*, il flusso volumetrico attraverso una sezione Ω :

$$\boxed{Q = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}. \quad (109)$$

Applicando la definizione di portata ad una sezione regolare, e tenendo conto del fatto che, in questo caso, la portata viene, per convenzione, definita in base alla normale, \mathbf{n}_s , equiversa al moto:

$$Q = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s dS = \int_{\Omega} u dS = \Omega U. \quad (110)$$

Confrontando questa definizione con le (107) si ha che $\Phi_2 = \rho Q_2$, e $\Phi_1 = -\rho Q_1$. Se riprendiamo ora l'equazione di bilancio della massa, e la scriviamo in termini di portata, dividendo per la densità ρ , che è costante, otteniamo:

$$Q_1 = Q_2;$$

la quale stabilisce che la portata che fluisce attraverso qualsiasi sezione regolare di una corrente è la stessa, ovvero:

$$\boxed{Q = U \Omega = \text{cost.}} \quad (111)$$

4.3. Equazione dell'energia per le correnti

Per scrivere un bilancio di energia tra due sezioni regolari conviene procedere in modo diverso, facendo un bilancio dell'energia trasportata dalla corrente per unità di tempo. Valuteremo inizialmente ciò che accade lungo una linea di corrente e poi integreremo su tutta la corrente. Consideriamo a tal fine, sotto l'ipotesi di flusso stazionario, due sezioni regolari, Ω_1 ed Ω_2 , ed una linea di corrente che collega due punti di queste sezioni (Figura 24). Proiettiamo ora l'equazione di bilancio dell'energia meccanica (83), lungo questa linea di corrente:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \cdot \mathbf{i}_s + g \nabla H \cdot \mathbf{i}_s = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{i}_s + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_s$$

il primo termine a primo membro è nullo per la stazionarietà del flusso, mentre la proiezione del primo termine a secondo membro è nulla in quanto, come già osservato a suo tempo, tale termine è sempre ortogonale alla velocità e dunque al versore della linea di corrente \mathbf{i}_s ; osservando infine che $\nabla H \cdot \mathbf{i}_s = \partial H / \partial s$, otteniamo:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s \quad (112)$$

nella quale il secondo membro rappresenta la dissipazione viscosa. Integrando questa equazione, lungo la linea di corrente, tra la sezione 1 e la sezione 2 otteniamo una relazione tra i carichi totali:

$$\int_1^2 \frac{\partial H}{\partial s} ds = H_2 - H_1 = \int_1^2 \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds . \quad (113)$$

Consideriamo ora un tubo di flusso infinitesimo nell'intorno della linea di corrente; l'energia per unità di tempo trasportata da questa porzione di corrente (ovvero la sua potenza) è data dal prodotto dell'energia per unità di peso del fluido, H , per il peso del fluido che fluisce nell'unità di tempo, γdQ :

$$dP = H \gamma dQ. \quad (114)$$

Osservando che, per la conservazione della massa, la portata dQ è costante lungo tutto il tubo di flusso, e quindi si ha $dQ_1 = dQ_2 = dQ$, si può esprimere la differenza tra la potenza nella sezione 2 e quella nella sezione 1 (che corrisponde all'energia dissipata nell'unità di tempo lungo il tubo di flusso) come:

$$H_2 \gamma dQ - H_1 \gamma dQ = \left(\int_1^2 \frac{\nu}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right) \gamma dQ$$

ovvero:

$$\gamma H_2 dQ - \gamma H_1 dQ = \left[\int_1^2 \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right] dQ$$

ed integrando sull'intera portata della corrente si giunge alla:

$$\gamma \int_Q H_2 dQ - \gamma \int_Q H_1 dQ = \int_Q \left[\int_1^2 \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right] dQ . \quad (115)$$

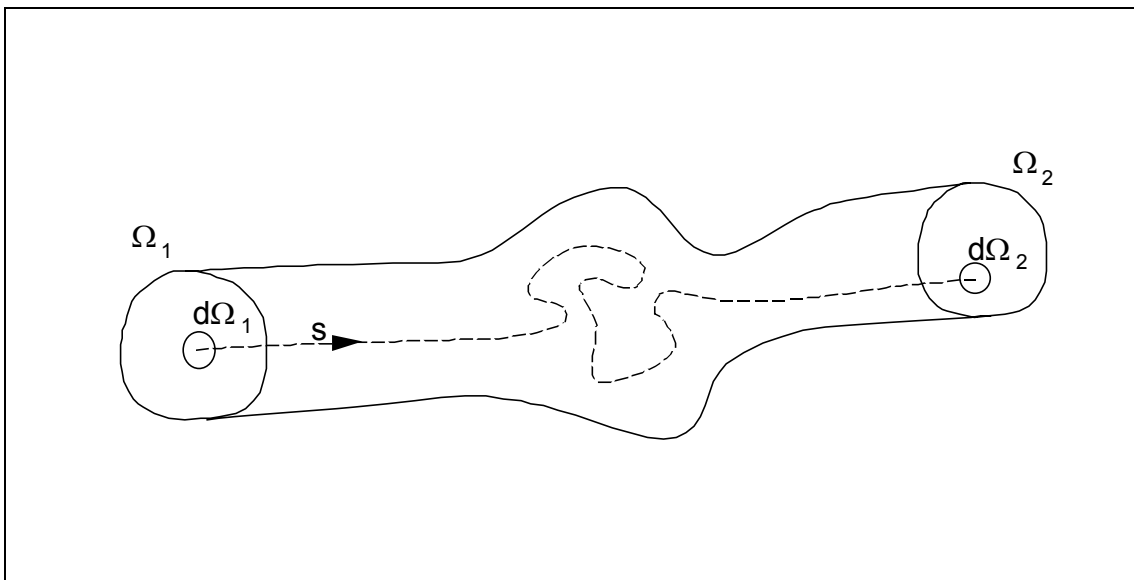


FIGURA 24

Consideriamo gli integrali a primo membro, ricordando che la portata che passa su ciascun tubo di flusso infinitesimo è $dQ = u d\Omega$ e tenendo presente la definizione di carico totale $H = h + u^2/2g$:

$$\int_Q HdQ = \int_{\Omega} Hud\Omega = \int_{\Omega} \left(h + \frac{u^2}{2g} \right) ud\Omega.$$

D'altra parte sappiamo che, nell'intorno di una sezione regolare, il flusso si comporta come se le linee di corrente fossero rettilinee, quindi valgono ancora su di essa le equazioni (67), scritte per i flussi paralleli, e possiamo concludere quindi, che *il carico piezometrico si mantiene costante sulle sezioni regolari*. Alla luce di queste considerazioni, l'integrale precedente può essere scomposto in due termini:

$$\int_{\Omega} \left(h + \frac{u^2}{2g} \right) ud\Omega = h \int_{\Omega} ud\Omega + \int_{\Omega} \frac{u^3}{2g} d\Omega = hQ + \alpha \frac{U^2}{2g} Q \quad (116)$$

dove α è un coefficiente, detto *coefficiente di Coriolis**, introdotto al fine di esprimere anche il secondo integrale in funzione di quantità medie e, in particolare, della velocità media sulla sezione, U . La sua espressione è:

$$\alpha = \frac{\int_{\Omega} u^3 d\Omega}{U^3 \Omega}. \quad (117)$$

Per mezzo della (116) possiamo esprimere il primo membro della (115) come:

$$\gamma \left(h_2 + \alpha \frac{U_2^2}{2g} \right) Q - \gamma \left(h_1 + \alpha \frac{U_1^2}{2g} \right) Q; \quad (118)$$

la quale è funzione delle sole quantità medie sulle sezioni regolari. Consideriamo ora il secondo membro della (115): scambiando gli integrali si ha:

$$\int_Q \left[\int_1^2 \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s ds \right] dQ = \int_1^2 \left[\int_Q \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s dQ \right] ds = \int_1^2 \left[\int_{\Omega} \mu (\nabla^2 \mathbf{u})_s ud\Omega \right] ds = -\gamma Q \int_1^2 \varepsilon_v ds; \quad (119)$$

avendo introdotto la quantità:

$$\varepsilon_v = -\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \frac{v}{g} (\nabla^2 \mathbf{u})_s \frac{u}{U} d\Omega. \quad (120)$$

che altro non è se non la dissipazione media sulla sezione, per unità di lunghezza. Trattandosi di dissipazione, l'integrale che vi compare sarà, generalmente, negativo; il segno meno nella definizione è dunque inserito in modo che la quantità ε_v risulti positiva. Sostituendo infine la (118) e la (119) nella (115) e dividendo per γQ si ottiene la cercata relazione tra l'energia meccanica della corrente nella sezione 1 e quella nella sezione 2:

* Il coefficiente Coriolis, o coefficiente di ragguglio per l'energia cinetica tiene conto della forma del profilo di velocità: $\alpha = 1$ nel caso in cui la velocità sia uniforme, e pari alla velocità media, su tutta la sezione, mentre si discosta, anche sensibilmente, dall'unità nel caso di distribuzioni fortemente non uniformi. È utile osservare che nel caso, frequente, di moto turbolento, la velocità è quasi ovunque sulla sezione molto vicina alla velocità media e quindi $\alpha \sim 1$; altrettanto non si può dire invece nel caso di moto laminare, poiché il profilo di velocità è parabolico e quindi fortemente non uniforme.

$$\left(h_1 + \alpha \frac{U_1^2}{2g} \right) - \left(h_2 + \alpha \frac{U_2^2}{2g} \right) = \int_1^2 \varepsilon_v ds \quad (121)$$

Questa equazione, che rappresenta l'*equazione dell'energia per le correnti* può essere riscritta in termini di carico totale per la corrente,

$$H = h + \alpha \frac{U^2}{2g}, \quad (122)$$

come:

$$H_1 - H_2 = \int_1^2 \varepsilon_v ds. \quad (123)$$

Questa equazione permette di valutare la variazione di energia della corrente tra due qualsiasi sezioni regolari di una corrente, senza nessuna ipotesi sul tratto di flusso che intercorre tra tali sezioni: si tratta in effetti di una formulazione globale del bilancio di energia. Se invece si sta considerando un tratto in cui la corrente è gradualmente variata è possibile scrivere una equazione differenziale che vale in tutti i punti della corrente, giungendo cioè ad una formulazione locale. Per farlo è sufficiente scrivere l'equazione (123) tra due sezioni regolari infinitamente vicine (Figura 25).

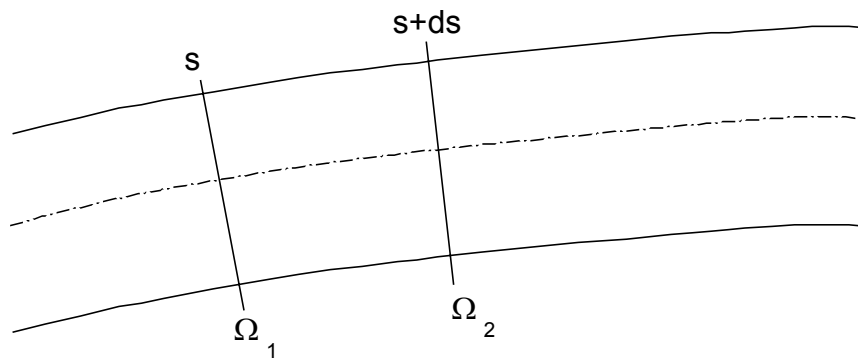


FIGURA 25

Poniamo $H_1 = H$, $H_2 = H + dH$ e la dissipazione viscosa nel tratto infinitesimo ds pari a $\varepsilon_v ds$; avremo:

$$H - H - dH = \varepsilon_v ds$$

e, dividendo per ds otteniamo la relazione differenziale cercata:

$$-\frac{\partial H}{\partial s} = \varepsilon_v \quad (124)$$

Il termine a primo membro rappresenta la perdita di carico totale per unità di lunghezza e viene usualmente indicato con:

$$\boxed{J = -\frac{\partial H}{\partial s}} \quad (125)$$

In questo modo possiamo scrivere la forma finale dell'equazione dell'energia per le correnti in forma locale:

$$\boxed{J = \varepsilon_v} \quad (126)$$

Naturalmente per poter calcolare la differenza di carico totale, sia utilizzando la forma locale che quella globale, sarebbe necessario conoscere ε_v . Bisogna osservare però che il termine di dissipazione non è stato possibile esprimerlo in termini di quantità medie sulla sezione, e sarebbe quindi necessario conoscere l'intero campo di velocità tridimensionale per poterlo determinare. Questo, da una parte, è in contrasto con lo spirito della trattazione delle correnti fatta finora, il cui scopo è di giungere ad una formulazione monodimensionale, dall'altra è di fatto impossibile nella quasi totalità dei problemi che si pongono nella pratica; per stimare le perdite di carico si farà allora riferimento a formule empiriche o semiempiriche basate su risultati sperimentali (oltre che, naturalmente, sull'analisi dimensionale).

4.4. Dissipazione viscosa

I fattori che influenzano la dissipazione viscosa, ε_v , sono fondamentalmente due: la struttura del flusso che caratterizza la corrente e le condizioni al contorno, in particolare in corrispondenza delle pareti solide che delimitano la corrente*. Dal punto di vista delle condizioni al contorno sarà necessario descrivere in modo quantitativo le asperità presenti nelle pareti che delimitano il flusso; per ciò che riguarda, invece, la struttura del flusso è necessario far riferimento al concetto di strato limite. Lo strato limite è quella zona di un flusso, prossima alla parete, nella quale gli effetti della viscosità sono determinanti. In flussi come quelli che caratterizzano le correnti, si può senz'altro affermare che l'intero campo di velocità è influenzato dalla presenza degli effetti viscosi ed è quindi, nel suo complesso, uno strato limite. Pur non avendo introdotto in questa trattazione gli strumenti atti ad un studio approfondito dello strato limite, ne tratteremo, nelle pagine che seguono, una descrizione fenomenologica, in modo da poter dare ragione, almeno qualitativa, dei fattori fisici che influenzano la dissipazione viscosa.

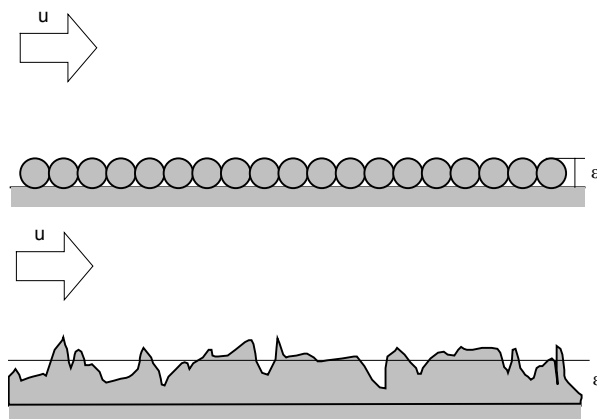


FIGURA 26

* per esempio l'alveo di un fiume o un tubo nel quale scorre la corrente

4.4.1. Scabrezza equivalente

Ogni superficie reale presenta delle asperità più o meno grandi che, in generale, hanno forma e dimensioni variabili. In queste condizioni definire una scala univoca che caratterizzi le dimensioni delle asperità non è possibile: anche se scegliessimo come altezza caratteristica delle asperità la loro altezza media, avremmo a che fare con una grandezza che, di fatto, non è misurabile. Il problema è invece più semplice nel caso in cui si abbia a che fare con una superficie in cui sia stata realizzata artificialmente una scabrezza omogenea. Il metodo più semplice per realizzarla è quello di rivestire una superficie liscia con sferette di diametro assegnato. In questo caso la scala che caratterizza le asperità è evidentemente il loro diametro, ϵ .

Tipo di condotta	Scabrezza equivalente (mm)
Vetro	0.001
Acciaio laminato nuovo	0.05
Acciaio laminato arrugginito	0.15÷0.25
Acciaio laminato incrostato	1.5÷3
Cemento liscio	0.3÷0.8
Cemento naturale	3

TABELLA 1

Definiamo la scala delle scabrezze nel caso generale a partire dai suoi effetti sul flusso: fissiamo infatti come scala l'altezza, ϵ_e , di una scabrezza artificiale omogenea che, per R_e molto grandi, determina la stessa dissipazione, ϵ_v , di quella, casuale, effettivamente presente.

La scabrezza di una superficie dipende dal materiale di cui è costituita e dal tipo di lavorazione con la quale è stata ottenuta. La Tabella 1 riporta dei valori tipici di riferimento per dei materiali comuni.

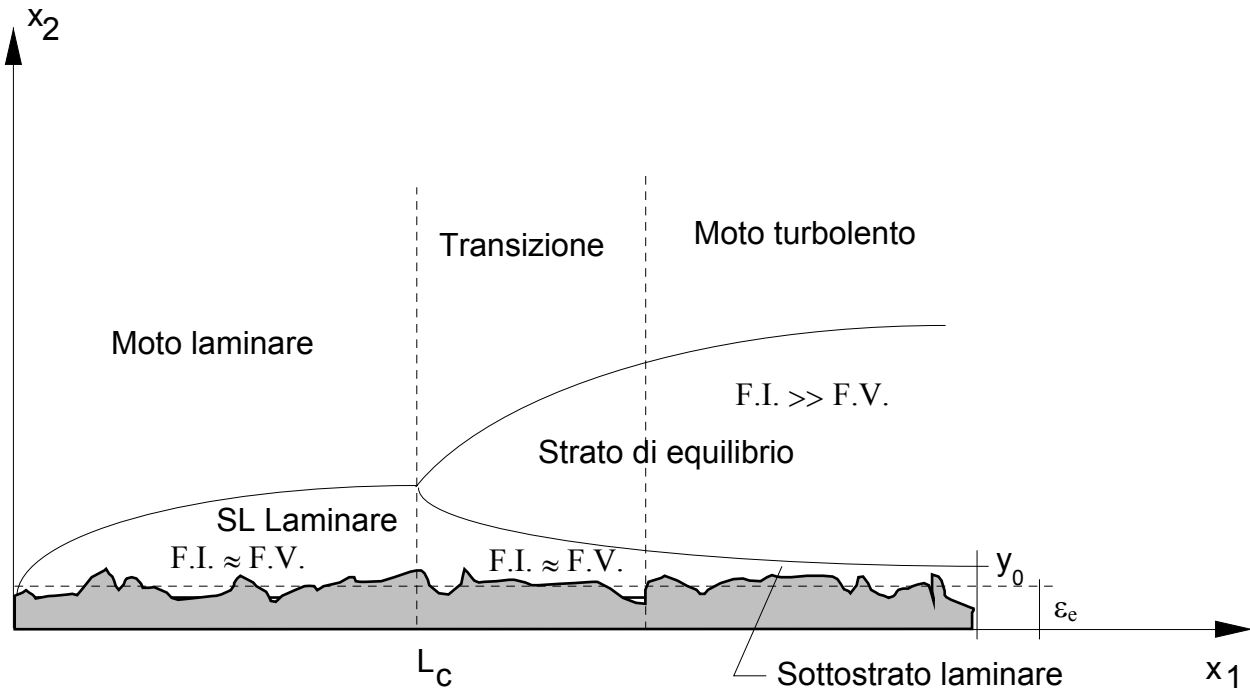


FIGURA 27

4.4.2. Evoluzione dello Strato limite

Analizziamo innanzitutto il comportamento di un flusso uniforme che viene in contatto con una parete scabra.

Lo strato limite nasce all'attacco della parete e comincia ad aumentare di spessore proporzionalmente alla radice quadrata della distanza dal bordo d'attacco, x_1 . In questa regione, il moto all'interno dello strato limite risulta laminare, ed eventuali disturbi non si propagano, ma si estinguono immediatamente per effetto delle forze viscosi, che risultano dello stesso ordine di grandezza di quelle d'inerzia. La zona appena descritta prende il nome di *strato limite laminare*. All'aumentare di x_1 il numero di Reynolds, $Re = Ux_1/\nu$, cresce, quindi le forze di inerzia diventano preponderanti rispetto a quelle viscosi ed il flusso diventa turbolento. La transizione tra un tipo di flusso e l'altro avviene per un numero di Reynolds critico, Re_{cc} , il cui valore è stato trovato sperimentalmente essere $Re_{cc} = 465$. Oltre questo punto il flusso diventa instabile originando due differenti strati che costituiscono lo *strato limite turbolento*. Queste due zone prendono il nome di *strato di equilibrio* e *sottostrato laminare*.

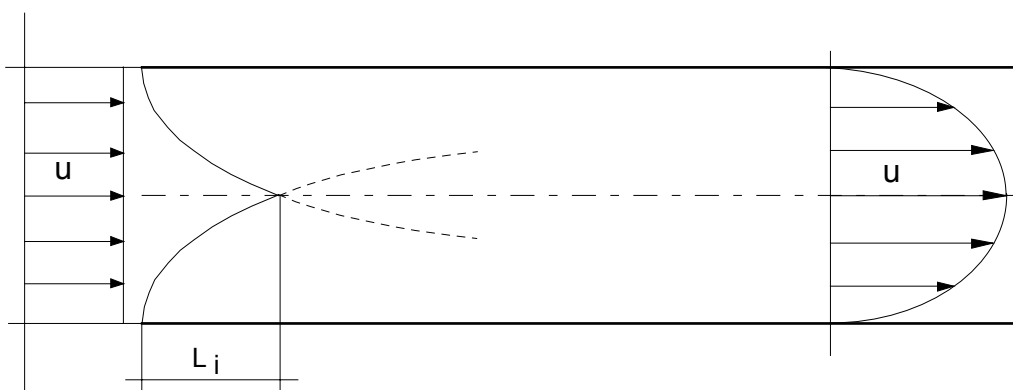


FIGURA 28

Lo strato di equilibrio è caratterizzato da un moto turbolento, nel quale i disturbi indotti si propagano in maniera imprevedibile in quanto le forze d'inerzia risultano molto maggiori di quelle viscosi ($Re \gg 1$). Il sottostrato laminare è, invece, una zona in cui le forze di inerzia sono ancora dello stesso ordine di grandezza di quelle viscosi ed il moto risulta laminare. Lo spessore di questo strato, che sarà indicato con y_0 , è solitamente molto piccolo e, a differenza dello spessore dello strato limite laminare, il suo spessore non dipende da x_1 .

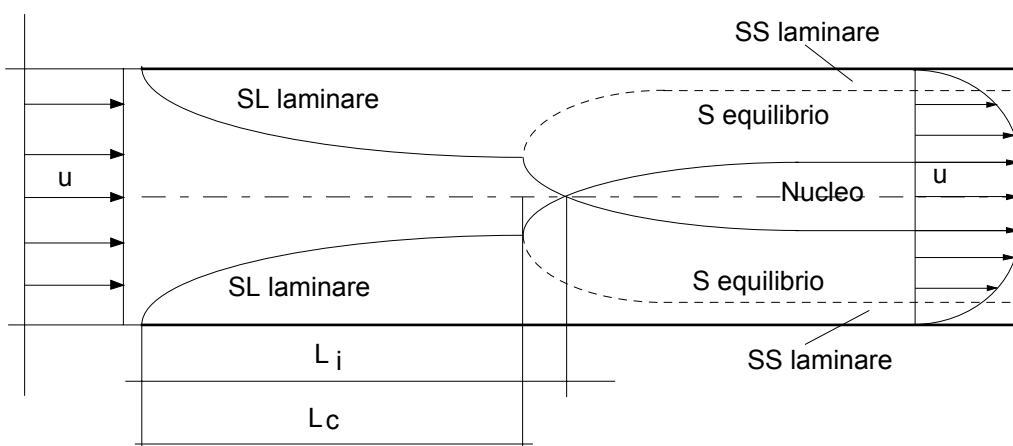


FIGURA 29

Dal punto di vista dello strato di equilibrio possiamo distinguere due situazioni in funzione del rapporto tra l'altezza del sottostrato laminare, y_0 , e quella della scabrezza, ε_e :

$y_0 > \varepsilon_e$: in tal caso la scabrezza non influenza lo strato di equilibrio, la parete si dice *fluidodinamicamente liscia*;

$y_0 < \varepsilon_e$: in tal caso la scabrezza influenza tutto lo strato limite, la parete si dice *fluidodinamicamente scabra*.

Se lo strato limite è generato all'interno di un condotto, dopo una fase iniziale in cui lo sviluppo non differisce da quello descritto sinora, esso interagisce con quello che si è generato sulla parete opposta. Esaminiamo, per semplicità il caso di un condotto bidimensionale delimitato da due pareti piane infinitamente estese. Possono verificarsi due situazioni differenti: nel primo caso i due strati si incontrano ad una distanza dall'imbocco L_i inferiore alla distanza critica L_c : i due strati si incontrano quando sono ancora laminari e si raccordano tra loro. All'interno del condotto si crea un flusso laminare uniforme, il profilo di velocità in una generica sezione è di tipo parabolico e tale rimane all'aumentare di x_1 (Figura 28).

Nel secondo caso invece, i due strati limite interagiscono ad una distanza, L_i , maggiore della distanza critica L_c , alla quale avviene la transizione a strato limite turbolento. Si generano quindi un sottostrato laminare ed uno strato di equilibrio in modo analogo a quanto descritto precedentemente. Nella parte centrale invece, l'interazione dei due strati porta alla generazione di una zona di raccordo che viene chiamata *nucleo*.

5. CORRENTI IN PRESSIONE

Innanzi di fare di questo caso una regola generale, sperimentalo due o tre volte, guardando se le sperienze producono gli stessi effetti

I classici problemi che si affrontano per mezzo dello schema delle correnti si dividono in due grandi categorie: i flussi di liquidi la cui superficie laterale è interamente delimitata da superficie solide, che vengono detti moti nelle condotte in pressione, ed i flussi che hanno almeno una parte della superficie laterale a contatto con un aeriforme, che sono detti moti a pelo libero. Non ostante le equazioni che rappresentano i principi fondamentali siano le stesse per entrambi, la trattazione di questi due casi è tradizionalmente differente e quindi saranno, anche in questa sede, trattati separatamente, incominciando dai moti nelle condotte in pressione.

5.1. Moto uniforme e permanente

5.1.1. Generalità

Consideriamo il flusso stazionario (permanente) di un fluido incomprimibile attraverso una condotta cilindrica (moto uniforme), l'equazione dell'energia per le correnti (126) afferma che la perdita di carico per unità di lunghezza è bilanciata dalla dissipazione ad opera delle forze viscosse:

$$j = \varepsilon_v \quad (127)$$

L'equazione di conservazione della massa (111) afferma che la portata attraverso qualsiasi sezione regolare deve essere la stessa:

$$Q = \text{cost.} \quad (128)$$

Se la portata è costante, essendo la condotta cilindrica, anche la velocità $U = Q/\Omega$ risulta costante, e rimanendo costante l'altezza cinetica $U^2/2g$, avremo che, nel caso in esame:

$$\boxed{i = j} \quad (129)$$

Quindi, nel caso di moto stazionario ed uniforme, la pendenza piezometrica, i , eguaglia le perdite di carico dovute alle forze viscosse, j .

5.1.2. Equazione di Darcy-Weisbach

L'equazione dell'energia per le correnti gradualmente variate stabilisce un legame tra le perdite di energia meccanica per unità di lunghezza, j , e la dissipazione viscosa ε_v . Quest'ultima, però, dipende sia dal regime di moto che dalle caratteristiche di scabrezza della parete a contatto con il fluido e, in generale, non è possibile determinarla per via analitica. Si utilizza allora l'analisi dimensionale che permette di esprimere le perdite di carico in funzione di coefficienti che possono

essere determinati sperimentalmente.

Scegliamo innanzitutto come grandezze fondamentali la lunghezza, la densità e la velocità; in un problema come quello che stiamo affrontando, legato alle condizioni al contorno alla parete, la scala delle lunghezze che influenza il fenomeno è il raggio idraulico, R_i , definito come il rapporto tra l'area della sua sezione, Ω , ed il suo contorno bagnato, B (Figura 22):

$$R_i = \frac{\Omega}{B}; \quad (130)$$

la scala delle densità è l'unica densità in gioco ρ , mentre la velocità caratteristica è la velocità media sulla sezione regolare, U . Per mezzo di queste grandezze è possibile adimensionalizzare la dissipazione viscosa:

$$\varepsilon_v = \frac{\lambda}{4R_i} \frac{U^2}{2g} \quad (131)$$

Il coefficiente λ , è detto *coefficiente di resistenza* e, a meno del fattore 4, rappresenta la dissipazione viscosa, per unità di lunghezza, adimensionale. Esso deve essere funzione dei gruppi adimensionali che caratterizzano il problema: se le pareti del condotto sono fluidodinamicamente lisce, l'unico gruppo influente sarà il numero di Reynolds, $R_e = 4R_i U/v$; nel caso di parete fluidodinamicamente scabra, invece, essendo in gioco anche le caratteristiche della parete, oltre che dal già citato numero di Reynolds dipenderà anche dal rapporto $\varepsilon_r = \varepsilon_e/4R_i$ detto *scabrezza relativa*. Il fattore 4 nelle formule dipende dal fatto che esse sono state scritte inizialmente per tubi tondi, per i quali il raggio idraulico è:

$$R_i = \frac{\Omega}{B} = \frac{\pi D^2}{4} \frac{1}{\pi D} = \frac{D}{4}. \quad (132)$$

I due gruppi adimensionali diventano quindi, in questo caso di notevole rilievo pratico, $R_e = DU/v$ e ε_e/D . Sostituendo l'espressione (131) nella (127) si ottiene l'*equazione di Darcy-Weisbach*:

$$j = \frac{\lambda}{4R_i} \frac{U^2}{2g} \quad (133)$$

che esprime le perdite di carico per unità di lunghezza in funzione del parametro adimensionale λ . Per poter conoscere le perdite di carico nel condotto è sufficiente determinare, sperimentalmente o analiticamente, il valore di λ al variare di R_e e di $\varepsilon_e/4R_i$.

5.1.3. Resistenza nelle condotte

Nel caso di moto laminare è possibile integrare le equazioni di Navier-Stokes, determinare il profilo di velocità che risulta parabolico e, da questo il coefficiente λ , che risulta inversamente proporzionale al numero di Reynolds:

$$\lambda = 64 \frac{\mu}{\rho U D} = \frac{64}{R_e}. \quad (134)$$

Nel caso di moto turbolento invece non è possibile trovare una soluzione analitica e bisogna dunque riferirsi a serie di dati sperimentali.

In Figura 30 sono riportati i risultati di esperimenti condotti su tubi resi artificialmente scabri per mezzo di sfere di diametro controllato pari ad ε (Nikuradse, 1933). Nel grafico è riportato, in scala bilogarithmica, il coefficiente di resistenza in funzione del numero di Reynolds, per diversi valori della scabrezza adimensionale.

Si osserva che per bassi valori del numero di Reynolds il moto è laminare ed il coefficiente di resistenza è inversamente proporzionale ad esso. Raggiunto un valore critico, Re_c , il moto diventa turbolento ed il coefficiente λ aumenta bruscamente. Aumentando ancora il numero di Reynolds il coefficiente scende lungo la curva che caratterizza i tubi fluidodinamicamente lisci; anche in questo tratto, come nel precedente, $\lambda = \lambda(Re)$. Oltre un certo numero di Reynolds avviene una transizione verso condizioni di parete fluidodinamicamente scabra che comporta un aumento di λ . Si può notare che, maggiore è la scabrezza, minore è il numero di Reynolds a cui avviene la transizione. In questa zona $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon_r)$. Infine, oltre un certo numero di Reynolds, il coefficiente di resistenza diventa indipendente da esso: $\lambda = \lambda(\varepsilon_r)$.

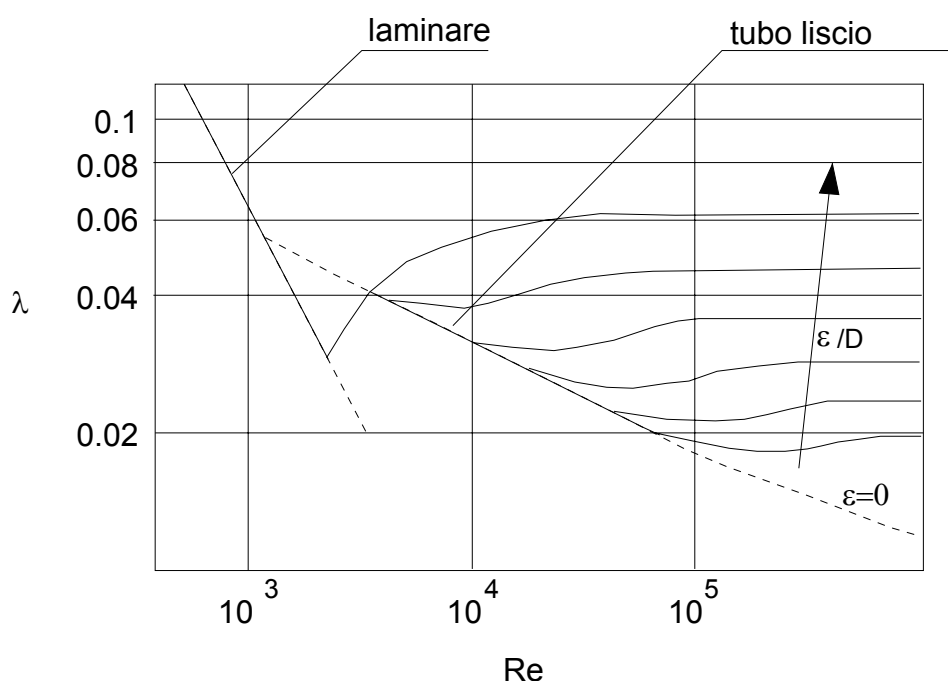


FIGURA 30

Nei tubi commerciali invece la scabrezza non è omogenea, si traccia allora un diagramma, detto di Moody in cui le curve sono tracciate in funzione della scabrezza relativa, $\varepsilon_r = \varepsilon_e / D$ (Figura 31). Dopo la zona a regime laminare, possiamo individuare una zona critica, all'interno della quale avviene la transizione a regime turbolento. Per valori più alti del numero di Reynolds si trova la cosiddetta zona di transizione nella quale $\lambda = \lambda(Re, \varepsilon_r)$. Il cambiamento da regime di parete liscia a quello di parete scabra avviene in modo più graduale, con un raccordo continuo tra le due pendenze, senza che λ raggiunga un minimo in prossimità della transizione per poi aumentare prima di raggiungere la condizione di turbolenza completamente sviluppata, come accade nel caso di scabrezza uniforme.

Per valori più alti del numero di Reynolds si trova la cosiddetta zona di regime assolutamente turbolento, nella quale $\lambda = \lambda(\varepsilon_r)$. Colebrook ha proposto una relazione semiempirica che permette di calcolare con buona approssimazione il coefficiente di resistenza sia in caso di parete liscia che scabra:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} + \frac{\varepsilon_e}{3.71D} \right) \quad (135)$$

Questa formula infatti è molto simile a quella per parete liscia se $\varepsilon_r \rightarrow 0$ e tende invece a quella per parete scabra in regime assolutamente turbolento se $R_e \rightarrow \infty$.

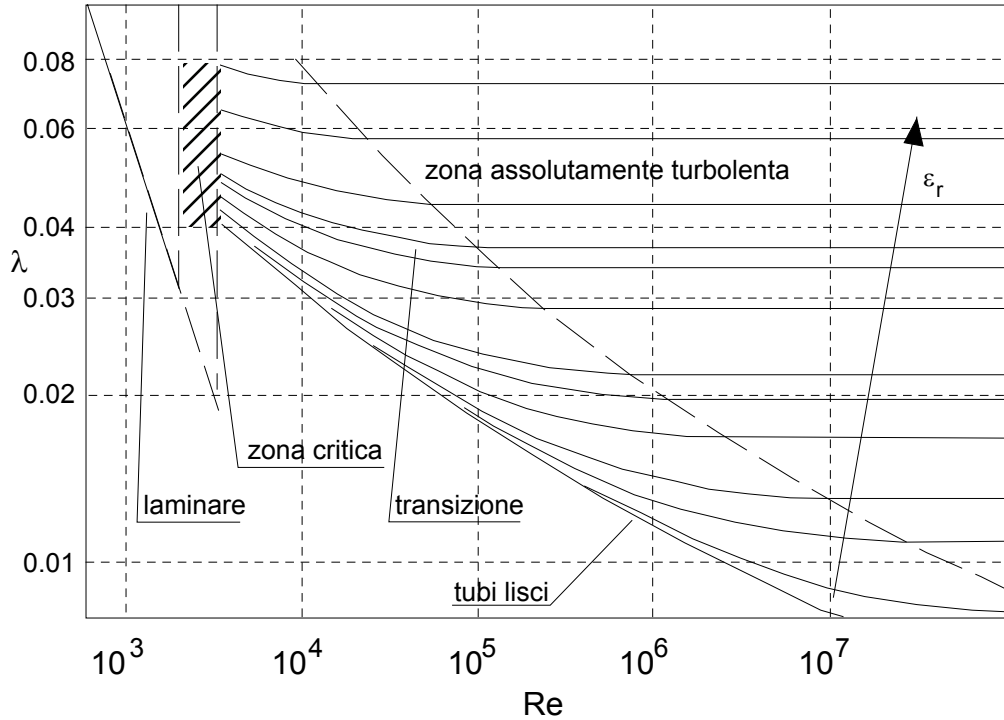


FIGURA 31

5.1.4. Formule pratiche

Le formule sinora riportate per i vari regimi di moto turbolento hanno delle espressioni derivate in modo analitico dalla forma dei profili di velocità, solo i coefficienti che compaiono sono stati determinati sperimentalmente, per questo motivo esse si adattano meglio di ogni altra ai risultati sperimentali per ampi campi di variazione dei parametri in gioco. D'altra parte esse hanno uno svantaggio fondamentale: sono tutte espresse in forma implicita, quindi vanno risolte iterativamente, per tentativi. Per superare questo problema sono state proposte diverse formule che approssimano le precedenti con sufficiente approssimazione ma che hanno la caratteristica di essere esplicite.

Esistono formule pratiche che coprono i diversi regimi di moto descritti in precedenza, in questa sede tuttavia riporteremo quelle valide in regime assolutamente turbolento che sono quelle di più frequente applicazione. Trattandosi inoltre di formule per risolvere problemi riguardanti condotte in pressione, si supporranno i tubi tondi e si farà riferimento al diametro piuttosto che al raggio idraulico.

5.1.4.1. Formula di Darcy

La portata, nel caso di tubi tondi si può scrivere come:

$$Q = \Omega U = \frac{\pi D^2}{4} U$$

e l'equazione di Darcy-Weisbach diventa:

$$j = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} = \frac{8\lambda}{g\pi^2} \frac{Q^2}{D^5} \quad (136)$$

e, definendo il coefficiente dimensionale $\beta_r = \frac{8\lambda}{g\pi^2}$ otteniamo la *formula di Darcy*:

$$j = \beta_r \frac{Q^2}{D^5} \quad (137)$$

che può dirsi equivalente a quella di Darcy-Weisbach, scritta per tubi tondi. Per valutare β sono state proposte diverse formule empiriche, valide in condizioni assolutamente turbolente, qui riportiamo quella di Gauckler-Strickler:

$$\beta_r = \frac{10.3}{k_s^2 D^{1/3}} \quad (138)$$

Nella quale k_s è un indice di scabrezza che aumenta al diminuire della scabrezza del tubo ed ha dimensioni $[m^{1/3} s^{-1}]$. I suoi valori tipici per condotte realizzate nei materiali più comuni sono riportate in Tabella 2.

Tipo di tubo	k_s ($m^{1/3} s^{-1}$)
Vetro, Ottone, Rame trafilato	liscio
Acciaio nuovo	100
Acciaio usato	90
Cemento intonacato nuovo	100
Cemento intonacato usato	70

TABELLA 2

5.1.4.2. Formula di Chézy

La formula di Darcy-Weisbach può anche essere espressa in modo da ricavare la velocità, sempre nel caso di tubi tondi:

$$U = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \sqrt{jR_i}, \quad (139)$$

e definendo il coefficiente $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$ otteniamo la formula di Chézy:

$$U = C \sqrt{jR_i}. \quad (140)$$

Al solito rimane da valutare il coefficiente C attraverso una relazione empirica. Per ottenerla notiamo che $\beta_r \propto 1/C^2$, quindi la formula di Gaucker-Strickler ha la forma:

$$C = cR^{1/6}. \quad (141)$$

Confrontandola con la precedente si ricava che il coefficiente $c = k_s$.

5.2. Moto permanente

5.2.1. Generalità

Nel paragrafo precedente è stato affrontato il problema del moto permanente all'interno di condotte che avessero sezione costante. In molti tratti di un impianto idraulico tuttavia la sezione varia più o meno bruscamente, ed è dunque necessario affrontare il problema in modo leggermente diverso. Classifichiamo innanzitutto i problemi che si possono presentare in due grandi categorie: quella dei moti in presenza di variazioni graduali di sezione, che saranno affrontati per mezzo delle equazioni delle correnti, e quella delle brusche variazioni di sezione, per le quali l'ipotesi di quasi-unidimensionalità non è valida e che dovranno essere risolti con strumenti diversi.

5.2.2. Variazioni graduali di sezione

Anche nel caso in cui la corrente non sia cilindrica ma abbia delle variazioni graduali di sezione lungo il suo percorso le equazioni che reggono il moto sono le stesse. L'equazione di conservazione della massa

$$\frac{\partial Q}{\partial s} = \frac{\partial(U\Omega)}{\partial s} = 0; \quad (142)$$

e l'equazione dell'energia per le correnti:

$$-\frac{\partial H}{\partial s} = \varepsilon_v \quad (143)$$

Come nel caso precedente, lo schema monodimensionale non è in grado di fornire informazioni sulle perdite di carico legate alla viscosità. Per determinarle si ipotizza che, essendo le variazioni di sezione graduali, in ogni tratto della condotta le perdite di carico siano le stesse che si avrebbero in una condotta uniforme di pari sezione. Naturalmente queste ipotesi sono valide finché non siano presenti zone di ricircolazione turbolenta che comportino ulteriori perdite di carico, come nel caso di distacco dello strato limite. Questo problema è particolarmente sentito nei tratti in cui c'è allargamento della condotta, nei quali il gradiente avverso di pressione favorisce il distacco della vena. Per questo motivo sono ammissibili angoli fino a $20^\circ \div 25^\circ$ nelle condotte convergenti mentre solo fino a $6^\circ \div 7^\circ$ se la condotta è divergente. Per determinare le perdite di carico nel tratto in cui varia il diametro sarà quindi necessario integrare l'equazione (143), stimando le perdite di carico in ogni sezione per mezzo di una delle relazioni empiriche precedentemente descritte e tenendo conto del fatto che queste variano di sezione in sezione in conseguenza della variazione del diametro. Per esempio, utilizzando la formula di Darcy, per ottenere l'andamento del carico totale, sarebbe necessario integrare la:

$$\frac{\partial H}{\partial s} = -\beta_r(D(s)) \frac{Q^2}{D^5(s)},$$

nella quale è necessario conoscere la funzione $D(s)$ che descrive come varia il diametro lungo la condotta.

5.2.3. Brusco allargamento

Si consideri il caso in cui si verifichi un brusco allargamento in una corrente in pressione con l'area della sezione trasversale che con discontinuità passa da Ω_1 ad Ω_2 , (Figura 32). Si proietti lungo l'asse della corrente l'equazione integrale di bilancio della quantità di moto (36) relativa al

volume, V_c , compreso tra la sezione 1, immediatamente a monte dell'allargamento, e la sezione 2, a valle, dove il moto riprende ad essere lineare, distante Δs dalla sezione 1. Con questa scelta sia Ω_1 che Ω_2 sono sezioni regolari. Per far questo formuliamo le seguenti ipotesi:

- perdite di carico dovute agli sforzi tangenziali sulla superficie laterale del volume di controllo trascurabili;
- stato di tensione normale sulle superficie regolari $\tau_{ss} \cong -p$, supponiamo cioè che la pressione sia molto maggiore degli altri termini che compaiono nell'equazione costitutiva;
- distribuzione idrostatica della pressione sulla sezione in 1 della condotta, che ha area $\Omega_2 - \Omega_1$, a causa del forte rimescolamento dovuto al ricircolo che si genera in prossimità di quella zona; anche in questa zona supponiamo $\tau_{ss} \cong -p$.

Valutiamo quindi l'equazione globale di bilancio della quantità di moto proiettata lungo l'asse della corrente:

$$\mathbf{I}_s + \mathbf{M}_s = \mathbf{G}_s + \mathbf{\Pi}_s. \quad (144)$$

Il primo termine è nullo in quanto il fenomeno è ipotizzato stazionario, quindi la quantità di moto contenuta nel volume di controllo è costante. Il secondo termine, che rappresenta il flusso di quantità di moto uscente attraverso la superficie del volume di controllo, può essere scomposto in tre contributi: il flusso attraverso la sezione 1, M_1 , quello attraverso la sezione 2, M_2 , e quello attraverso la superficie laterale, M_L . Quest'ultimo termine è evidentemente nullo in quanto non c'è flusso di massa attraverso le pareti laterali del condotto considerato, quello attraverso la sezione 1 è invece:

$$M_1 = \int_{\Omega_1} \rho \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) d\Omega \cdot \mathbf{i}_s = -\rho \int_{\Omega_1} u^2 d\Omega;$$

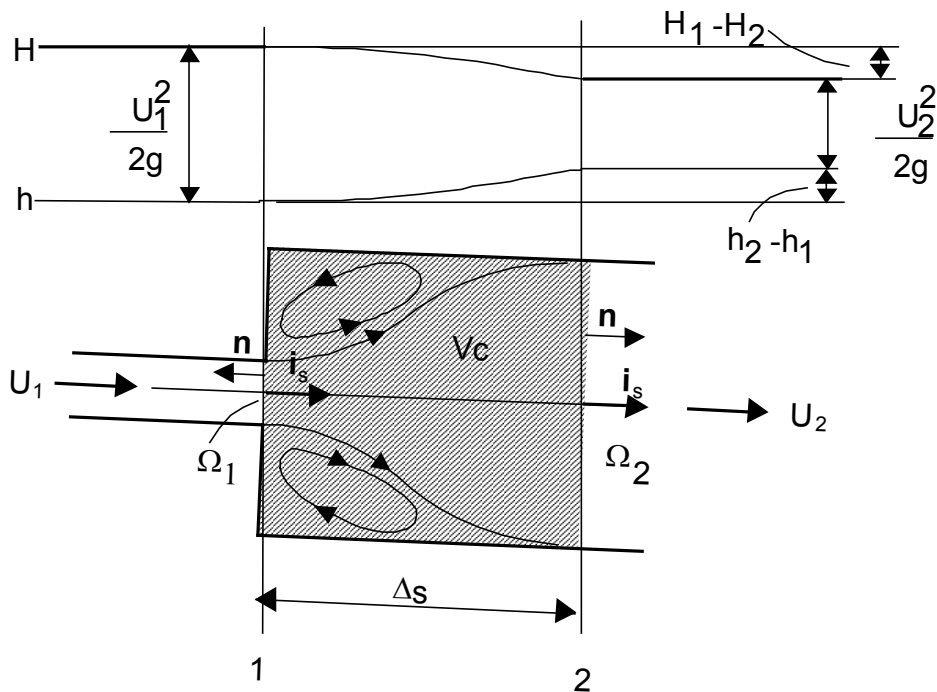


FIGURA 32

avendo indicato con \mathbf{i}_s il versore dell'asse della corrente e con \mathbf{n} la normale esterna a V_c , ed avendo tenuto conto del fatto che la sezione è regolare e quindi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{i}_s = u$, mentre $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = -u$. Introducendo il coefficiente di ragguglio per la quantità di moto*:

$$\beta = \frac{\int u^2 d\Omega}{U^2 \Omega} \quad (145)$$

il flusso può essere espresso per mezzo della velocità media sulla sezione:

$$M_1 = -\beta \rho U_1^2 \Omega_1.$$

Analogamente il flusso sulla sezione 2 può essere espresso come:

$$M_2 = \beta \rho U_2^2 \Omega_2;$$

avendo tenuto conto del fatto che, questa volta, la normale esterna, \mathbf{n} , è concorde con la velocità.

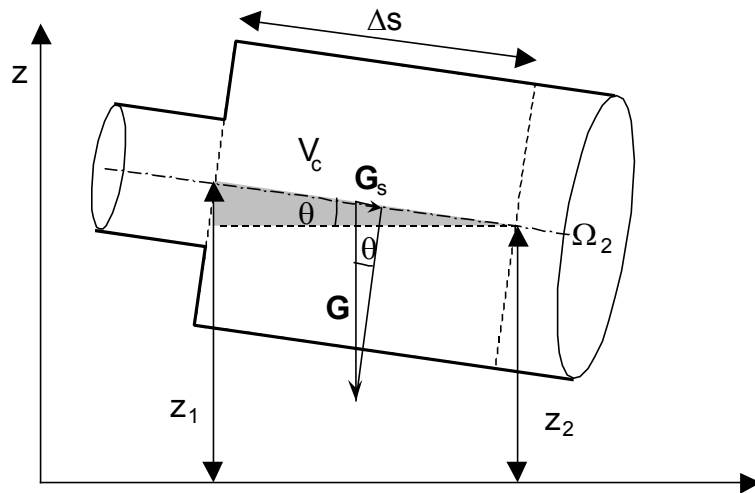


FIGURA 33

Quindi il flusso di quantità di moto, proiettato lungo s , risulta:

$$M_s = M_1 + M_2 = -\beta \rho U_1^2 \Omega_1 + \beta \rho U_2^2 \Omega_2. \quad (146)$$

La risultante delle forze di massa, \mathbf{G} , è diretta verso il basso ed ha modulo pari al peso del volume di controllo $\gamma V_c = \gamma \Omega_2 \Delta s$. La sua componente lungo l'asse della condotta è

$$G_s = \gamma \Omega_2 \Delta s \sin \theta;$$

nella quale θ indica l'inclinazione dell'asse della condotta rispetto all'orizzontale. D'altra parte, osservando il triangolo rettangolo campito in grigio nella Figura 33, si evince che

$$(z_1 - z_2) = \Delta s \sin \theta,$$

e sostituendo nella precedente si ottiene:

* β è l'analogo, per la quantità di moto, del coefficiente di Coriolis α per l'energia cinetica

$$G_s = \gamma(z_1 - z_2)\Omega_2 \quad (147)$$

La componente lungo l'asse della risultante delle forze di superficie esterne che agiscono sul volume di controllo può essere anch'essa scomposta nella somma di tre contributi, sulle sezioni 1 e 2 e sulla superficie laterale. Sulla superficie laterale, il contributo in direzione dell'asse è fornito dalle tensioni tangenziali che, per ipotesi, sono trascurabili. Sulle sezioni 1 e 2 invece il contributo in direzione assiale è dato dalle tensioni normali tra le quali, per ipotesi, prevale la pressione. Tenendo conto che si è supposto che la distribuzione delle pressioni sia idrostatica su tutta la sezione 1, anche nella corona circolare corrispondente alla zona di ricircolo, mentre sulla sezione è senz'altro idrostatica in quanto si tratta di una sezione regolare, si può scrivere il contributo delle forze di superficie in direzione assiale:

$$\Pi_s = p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2. \quad (148)$$

Sostituendo le (146), (147) e (148) nella (144) si ottiene infine:

$$-\beta\rho U_1^2 \Omega_1 + \beta\rho U_2^2 \Omega_2 = \rho g \Omega_2 (z_1 - z_2) + p_1 \Omega_2 - p_2 \Omega_2,$$

dividendo per $\rho g \Omega_2$, e ricordando la definizione di carico piezometrico, $h = z + p/\gamma$, si ottiene:

$$h_1 - h_2 = -\frac{\beta}{g} U_2 (U_1 - U_2); \quad (149)$$

questa, tenendo conto dell'equazione di conservazione della massa:

$$U_1 \Omega_1 = U_2 \Omega_2 = Q. \quad (150)$$

diventa:

$$h_1 - h_2 = \frac{\beta}{g} U_2^2 \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right), \quad (151)$$

dalla quale si evince che, in corrispondenza di un brusco allargamento di sezione, si ha sempre un innalzamento della quota piezometrica.

Calcoliamo la perdita di carico totale:

$$H_1 - H_2 = h_1 - h_2 + \frac{1}{2g} (U_1^2 - U_2^2), \quad (152)$$

supponendo $\beta = 1$, e sostituendovi la precedente:

$$H_1 - H_2 = \frac{U_2^2}{g} \left(1 - \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right) + \frac{U_1^2}{2g} - \frac{U_2^2}{2g} = \left(\frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 1\right)^2 \frac{U_2^2}{2g} = \eta \frac{U_2^2}{2g} \quad (153)$$

che è detta *relazione di Bordà* e permette di valutare la perdita di carico concentrata nel caso di brusca espansione. η , che è detto *coefficiente di perdita di carico*, rappresenta la frazione dell'altezza cinetica a valle che si perde in corrispondenza del brusco allargamento di sezione.

5.2.4. Brusco restringimento

In questo caso la corrente va restringendosi verso valle fino a raggiungere una sezione contratta poco più a valle del restringimento (Figura 34). L'esperienza mostra che le perdite di carico durante la fase di contrazione della vena (tratto 1-C) sono molto minori di quelle nella fase di espansione (tratto C-2). Se si trascurano le prime rispetto alle seconde ($H_c \approx H_1$) si può applicare l'equazione globale della quantità di moto in direzione dell'asse ad un volume compreso tra la sezione S_c e la sezione S_2 , in modo del tutto analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente. Se si suppone che la distribuzione di pressione all'interfaccia tra il volume di controllo V_c e la zona di ricircolo all'esterno sia idrostatica ci si riconduce alla formula di Bordà scritta per l'espansione tra S_c ed S_2 . In questo caso, però, non è nota a priori l'area della sezione contratta, che va comunque determinata per via empirica. Indicando con $k = \Omega_c / \Omega_2$ il rapporto di contrazione, la perdita di carico risulta:

$$H_1 - H_2 = \left(\frac{1}{k} - 1 \right)^2 \frac{U_2^2}{2g} \quad (154)$$

nella quale k è un coefficiente che deve essere determinato empiricamente in funzione del rapporto Ω_2/Ω_1 .

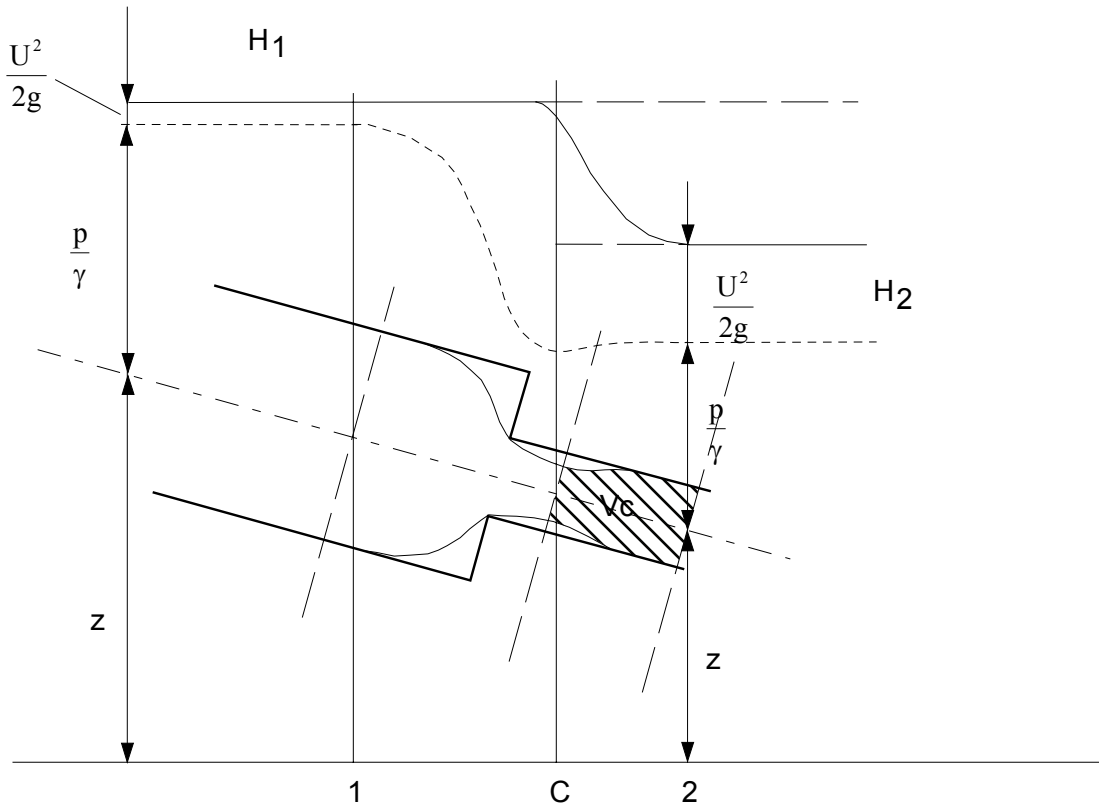


FIGURA 34

Più semplicemente è possibile esprimere la perdita di carico come frazione dell'altezza cinetica a valle del fenomeno introducendo un coefficiente di perdita di carico η che risulta legato a k dalla:

$$\eta = \left(\frac{1}{k} - 1 \right)^2 \quad (155)$$

Un grafico del coefficiente di perdita di carico, η , determinato sperimentalmente in funzione del rapporto di sezione in condizioni, di turbolenza completamente sviluppata, è riportato in Figura 35.

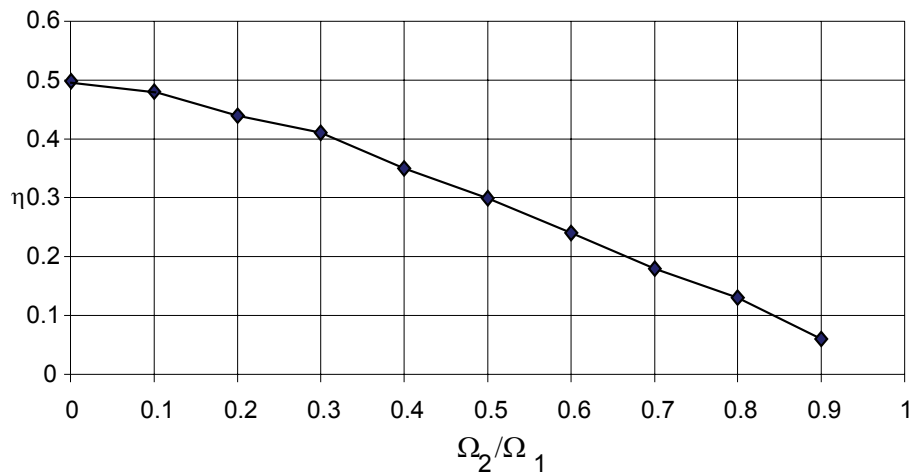
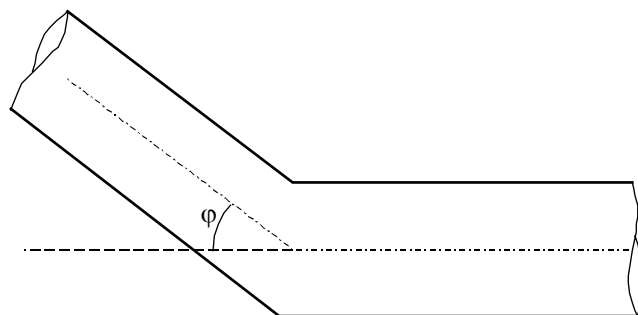


FIGURA 35

5.2.5. Altre perdite di carico concentrate

Nei problemi di brusca variazione del flusso come ad esempio curve, gomiti, giunzioni, saracinesche o, in generale ostacoli improvvisi si generano zone di ricircolo le quali, pur dissipando energia, non contribuiscono al flusso medio del fluido, queste perdite non rientrano in quelle descrivibili nello schema di corrente gradualmente variata e vengono quindi trattate come perdite concentrate. Nella maggioranza dei casi non è possibile trovare delle soluzioni analitiche che permettano di valutare le perdite di carico come è accaduto nel caso di brusca espansione. Si rinuncia allora ad una descrizione dettagliata di ciò che accade nel tratto che comprende il fenomeno e si valutano globalmente le perdite di carico. Si scelgono due sezioni regolari, una a monte ed una a valle e si applica tra di esse l'equazione dell'energia delle correnti (121). Considerando come scala dell'energia per unità di peso l'altezza cinetica a valle del fenomeno, $U_2^2/2g$, il termine dissipativo viene scritto in forma adimensionale per mezzo del già introdotto coefficiente di perdita di carico:

$$H_1 - H_2 = \eta \frac{U_2^2}{2g}. \quad (156)$$



φ	η
20°	0.046
40°	0.139
50°	0.364
80°	0.740
90°	0.984
100°	1.260
120°	1.861
140°	2.431

FIGURA 36

Questo coefficiente adimensionale è funzione, in generale dei parametri geometrici che caratterizzano il fenomeno (raggio di curvatura della curva, rapporto di contrazione nella riduzione di sezione, ecc.) e del numero di Reynolds. Se si suppone però che il moto avviene con un regime di turbolenza pienamente sviluppata ($Re \gg 1$), quest'ultima dipendenza viene meno ed η dipende solo da fattori geometrici adimensionali. Per una curva, ad esempio, η è funzione del rapporto tra il raggio di curvatura della curva ed il diametro della condotta oltre che dell'angolo totale che forma

la curva. Per una curva a gomito, con raggio di curvatura nullo, la perdita di carico è invece funzione del solo angolo di variazione della direzione. Valori di η per diversi angoli, φ , di variazione della direzione sono riportati nella Figura 36.

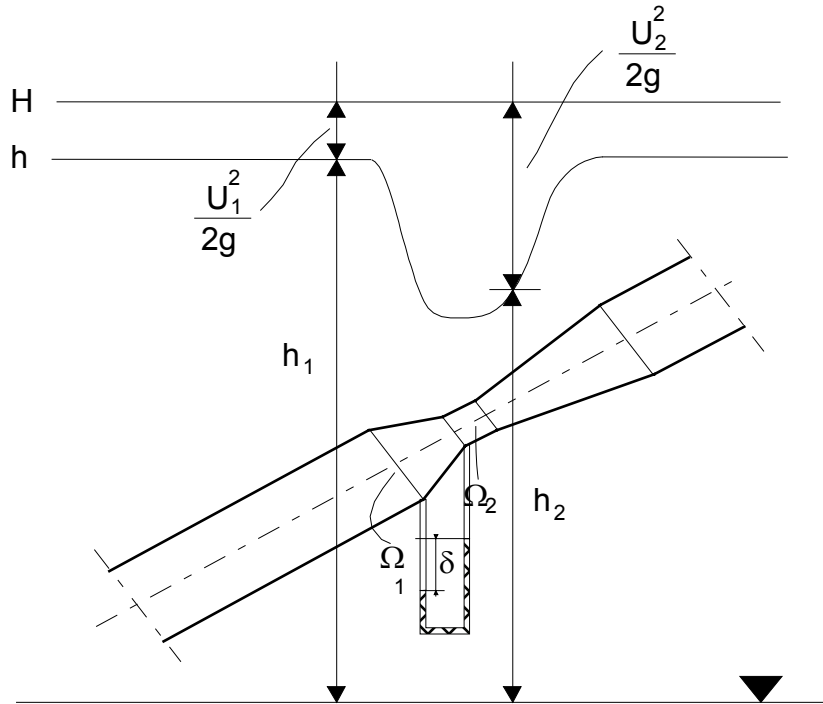


FIGURA 37

5.2.6. Venturimetro

La portata effluente attraverso una condotta può essere misurata attraverso la valutazione della differenza di carico piezometrico determinata in un venturimetro, ovvero un restringimento di sezione da Ω_1 ad Ω_2 con un raccordo sia a monte sia a valle in modo da ridurre al massimo i fenomeni dissipativi (Figura 37). Al fine di evitare la presenza di zone di ricircolazione il divergente risulta più lungo del convergente. Supponiamo che sia Ω_1 che Ω_2 siano sezioni regolari. Indicata con Q la portata, l'equazione di continuità fornisce:

$$Q = \Omega_1 U_1 = \Omega_2 U_2.$$

Se il condotto è ben raccordato e consideriamo due sezioni sufficientemente vicine da poter trascurare anche le perdite di carico distribuite, dovute agli sforzi tangenziali, l'equazione dell'energia meccanica si riduce ad $H = \text{cost.}$, ovvero:

$$h_1 + \frac{U_1^2}{2g} = h_2 + \frac{U_2^2}{2g}$$

da cui, utilizzando l'equazione di continuità si ottiene:

$$Q = \frac{\Omega_1}{\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - 1}} \sqrt{2g(h_1 - h_2)}, \quad (157)$$

e, definendo un *coefficiente di portata*:

$$c_Q = \frac{1}{\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - 1}}$$

la relazione tra differenza di carico piezometrico e portata diventa:

$$Q = c_Q \Omega_1 \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (158)$$

che rappresenta l'equazione di taratura per il venturimetro.

Sostituendo nella precedente l'equazione del manometro differenziale (102) si ottiene infine la portata in funzione della lettura manometrica δ :

$$Q = c_Q \Omega_1 \sqrt{2g \frac{(\gamma_m - \gamma)}{\gamma} \delta} \quad (159)$$

Nel caso le perdite di carico abbiano un effetto non trascurabile, la portata sarà inferiore a quella ora calcolata, a parità di differenza di carico piezometrico. Si definisce allora il coefficiente di portata come:

$$c_Q = \frac{c_v}{\sqrt{\frac{\Omega_1^2}{\Omega_2^2} - 1}}, \quad (160)$$

nella quale c_v è un coefficiente compreso tra 0 ed 1 che rappresenta l'effetto delle perdite di carico. Per un venturimetro questo coefficiente assume valori dell'ordine di 0.98.

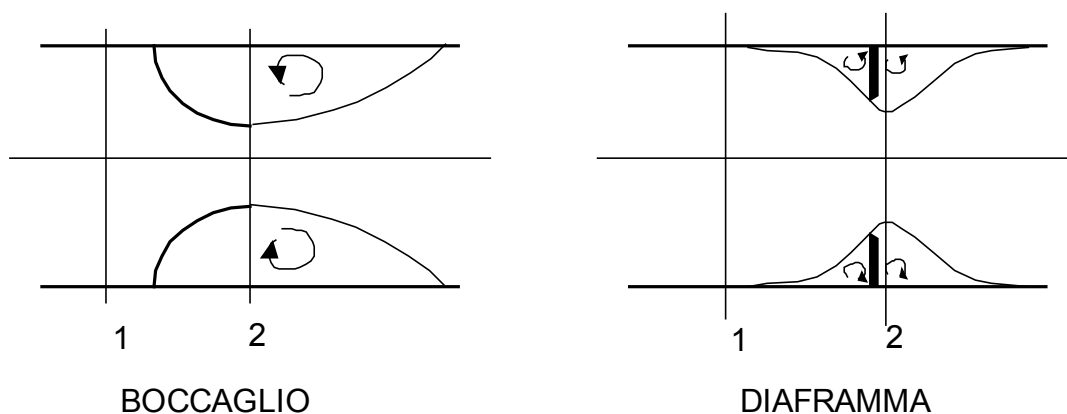


FIGURA 38

Se si accetta di introdurre delle perdite di carico più consistenti è possibile utilizzare anche dei dispositivi più semplici e compatti per la misura della portata come ad esempio i bocchigli ed i diaframmi, che introducono comunque un restringimento nella condotta, ma senza i raccordi che impediscono il generarsi di fenomeni dissipativi (Figura 38). Valori tipici di tale coefficiente sono: $c_v = 0.6$ per i diaframmi e $c_v = 0.95$, per i bocchigli, che sono meglio raccordati.

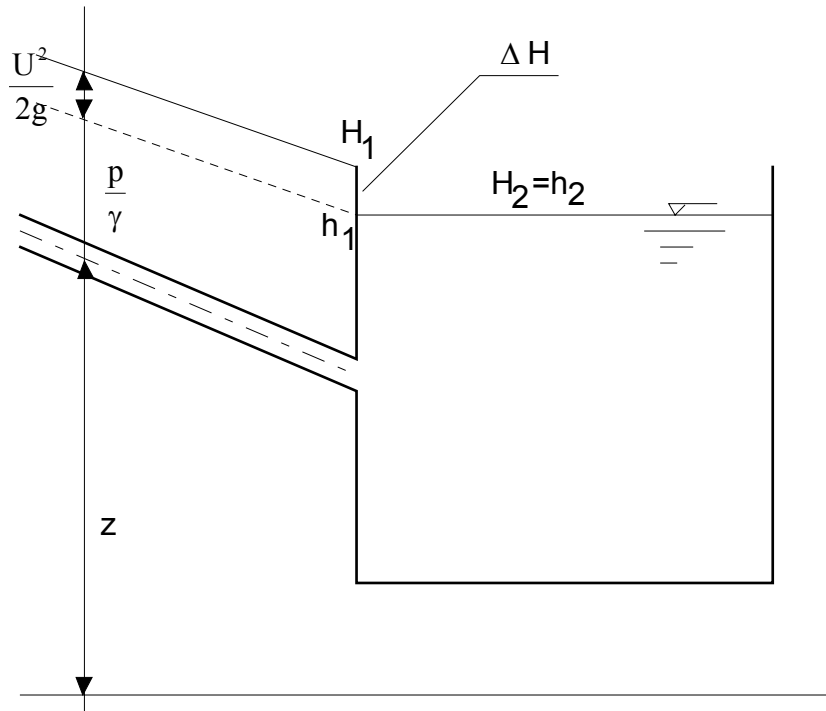


FIGURA 39

5.2.7. *Sbocco in un serbatoio*

Per valutare le perdite di carico che derivano dallo sbocco del flusso di una condotta in un serbatoio si consideri il carico totale nella sezione immediatamente a monte dello sbocco (Figura 39):

$$H_1 = \frac{U^2}{2g} + h,$$

e lo si confronti con quello misurato nel serbatoio dove il fluido è in quiete:

$$H_2 = h_2.$$

Il carico piezometrico che compare nelle due equazioni è lo stesso perché all'interno del serbatoio la distribuzione di pressione è ovunque piezometrica. In particolare, poiché si fa riferimento alla pressione relativa, esso coincide con la quota z_{pl} del pelo libero del serbatoio: $h = 0/\gamma + z_{pl} = z_{pl}$. La perdita di carico è quindi:

$$\Delta H = H_1 - H_2 = \frac{U^2}{2g}. \tag{161}$$

Si perde quindi tutta l'energia cinetica con la quale il flusso entra nel serbatoio. Facendo riferimento alla formula generale per la valutazione delle perdite di carico localizzate (156), il coefficiente di perdita di carico risulta $\eta = 1$. Naturalmente è possibile ridurre questa perdita inserendo un tratto divergente al termine della condotta, in modo che parte dell'energia cinetica venga convertita in energia potenziale prima dello sbocco nel serbatoio (Figura 40).

5.2.8. *Imbocco di condotte*

La perdita di carico dovuta all'imbocco di una condotta da un serbatoio è legata, anche in questo caso alla generazione, in prossimità della zona di imbocco, di una zona di ricircolo, e quindi di una

sezione contratta. L'entità di queste perdite dipende dalla geometria della connessione tra serbatoio e condotta. Nel caso di innesto diretto, nel quale la condotta termina a filo con la parete del serbatoio, il problema può essere assimilato ad un caso limite del brusco restringimento descritto in precedenza, portando all'infinito la sezione a monte, Ω_1 . Di conseguenza il rapporto $\Omega_2/\Omega_1 \rightarrow 0$ e, come si evince dal diagramma di Figura 35, la perdita di carico è circa pari alla metà dell'altezza cinetica: $\eta = 0.5$.

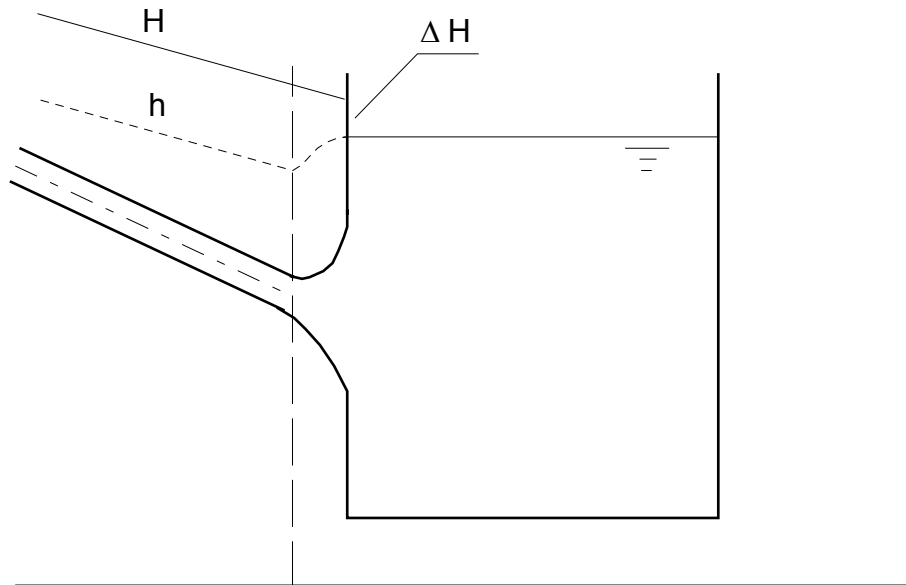


FIGURA 40

Per ridurre queste perdite di carico è possibile inserire un boccaglio di raccordo in modo da evitare del tutto o, almeno ridurre il distacco della vena e la generazione di una zona di ricircolo (Figura 42a). Un valore tipico per il coefficiente di perdita di carico può essere $\eta = 0.06$.

Nel caso infine sia presente un tubo aggiuntivo interno (Figura 42b), i fenomeni dissipativi sono nettamente più pronunciati che nei due casi precedenti e si raggiungono perdite di carico dell'ordine di grandezza dell'altezza cinetica: $\eta = 1$.

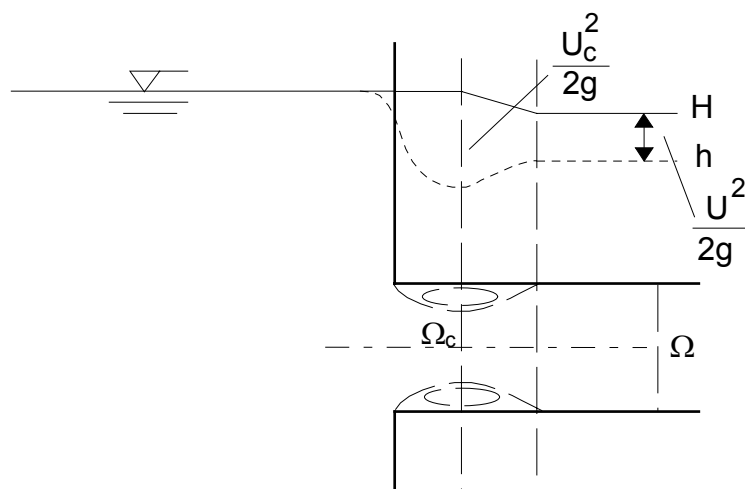


FIGURA 41

La portata può essere espressa con una relazione del tipo:

$$Q = c_0 \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (162)$$

nella quale Ω è la sezione della condotta, h_1 il carico piezometrico nel serbatoio ed h_2 quello in una sezione immediatamente a valle della sezione contratta nella quale il flusso abbia di nuovo occupato tutta la condotta. Il coefficiente riduttore della portata, c_Q , è legato ad η ; infatti:

$$H_1 - H_2 = h_1 - h_2 - \frac{U_2^2}{2g} = \eta \frac{U_2^2}{2g},$$

da cui, utilizzando la (162):

$$\eta = \frac{1}{c_Q^2} - 1. \quad (163)$$

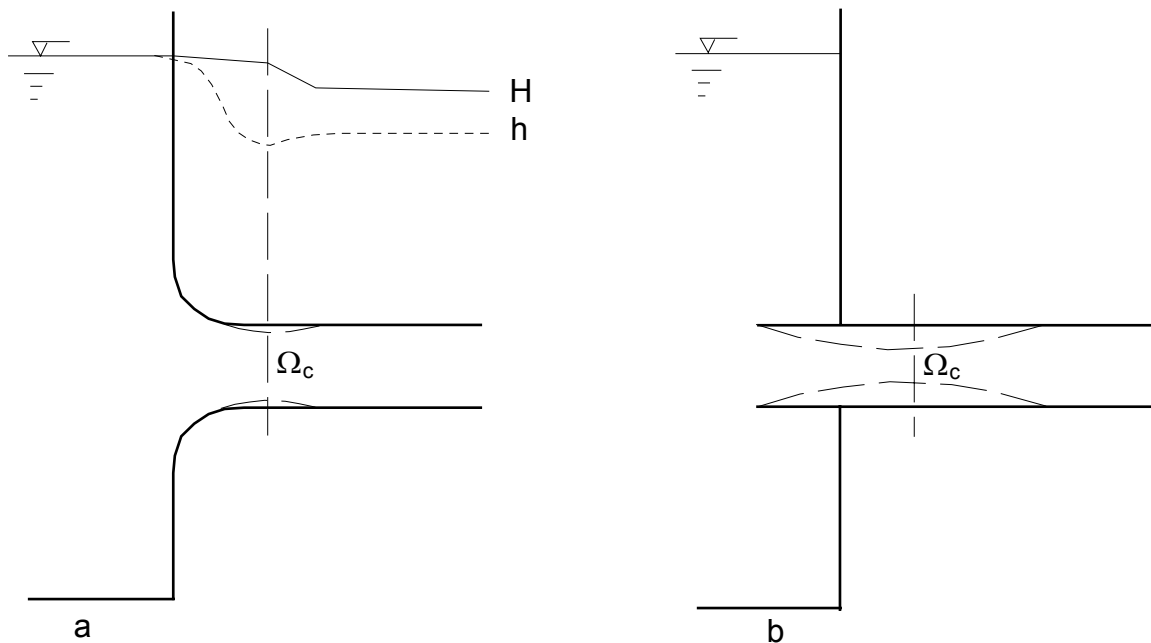


FIGURA 42

5.2.9. Efflusso libero

Anche se non riguarda strettamente il moto di un fluido in una condotta in pressione, tratteremo in questa sede l'efflusso libero di un fluido da un serbatoio, che si affronta con una trattazione analoga a quella che si è vista nei paragrafi precedenti. Notiamo innanzitutto che possiamo dividere questi fenomeni in due grandi categorie: la prima comprende tutti quei casi nei quali il fluido effluisce in una zona nella quale è presente un fluido di pari densità, la seconda invece è costituita da quei casi nei quali l'efflusso avviene in un fluido di densità molto minore come, ad esempio quando dell'acqua effluisce in aria.

Quando un fluido effluisce in un fluido di pari densità (Figura 43), possiamo al solito individuare, immediatamente a valle dello sbocco, una sezione contratta, ed è lecito supporre che nel suo intorno il flusso sia quasi-unidimensionale; perciò la sezione contratta è regolare e su di essa il carico piezometrico è costante. Se consideriamo che nel serbatoio, lontano dall'imbocco, la velocità è con buona approssimazione nulla, possiamo prendere una qualsiasi sezione in questa zona come un caso limite di sezione regolare. Supponiamo, inizialmente, di poter trascurare le perdite di carico, applicando il teorema dell'energia meccanica su una qualsiasi traiettoria tra queste due sezioni otteniamo, nel caso stazionario:

$$H_1 = H_c$$

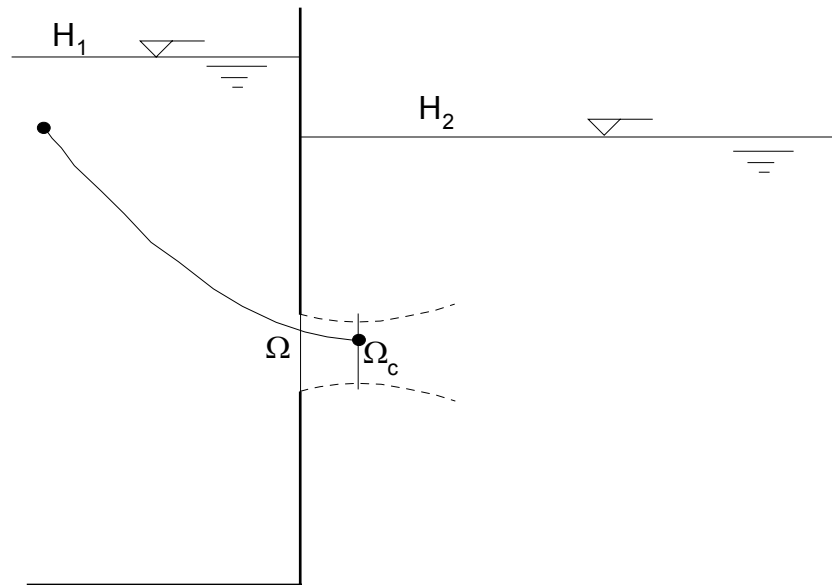


FIGURA 43

avendo indicato con H_1 il carico totale nel serbatoio e con H_c quello nella sezione contratta. Si ha dunque, essendo $U_1=0$:

$$h_1 = h_c + \frac{U_c^2}{2g}$$

dalla quale si ricava l'espressione della velocità:

$$U = \sqrt{2g(h_1 - h_c)} \quad (164)$$

che è detta *velocità Torricelliana* e coincide con quella che assumerebbe un grave cadendo da una altezza h_1-h_c . Per tener conto delle perdite di carico si introduce, come in precedenza, un coefficiente riduttore della velocità c_v :

$$U = c_v \sqrt{2g(h_1 - h_c)}. \quad (165)$$

Per ottenere la portata è sufficiente moltiplicare per la sezione contratta: $\Omega_c = k \Omega$ (nella quale Ω è la sezione dell'apertura attraverso cui avviene l'efflusso e k il rapporto di contrazione):

$$Q = c_v k \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_c)} = c_Q \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_c)} \quad (166)$$

avendo introdotto, al solito, il coefficiente di portata $c_Q = k c_v$.

Se invece l'efflusso avviene in un fluido di densità molto minore, non è più possibile individuare una sezione contratta: il flusso è soggetto all'azione della forza di gravità e la vena curva verso il basso, continuando ad accelerare (Figura 44). Non esiste più una sezione nel cui intorno il flusso può più essere considerato quasi-unidimensionale poiché non sono trascurabili gli effetti della curvatura delle linee di corrente. Possiamo supporre però che in una sezione immediatamente a valle dello sbocco, sia la pressione ad essere costante. Se si fa riferimento all'efflusso di acqua in aria, la pressione relativa sarà nulla su tutta la sezione. In tale sezione quindi il carico piezometrico non è costante e quindi neanche la velocità. La velocità alla generica quota può essere ottenuta, come in precedenza, utilizzando l'equazione dell'energia meccanica sulle traiettorie che collegano una zona in quiete a carico piezometrico h_1 ed una generica quota z della sezione di sbocco:

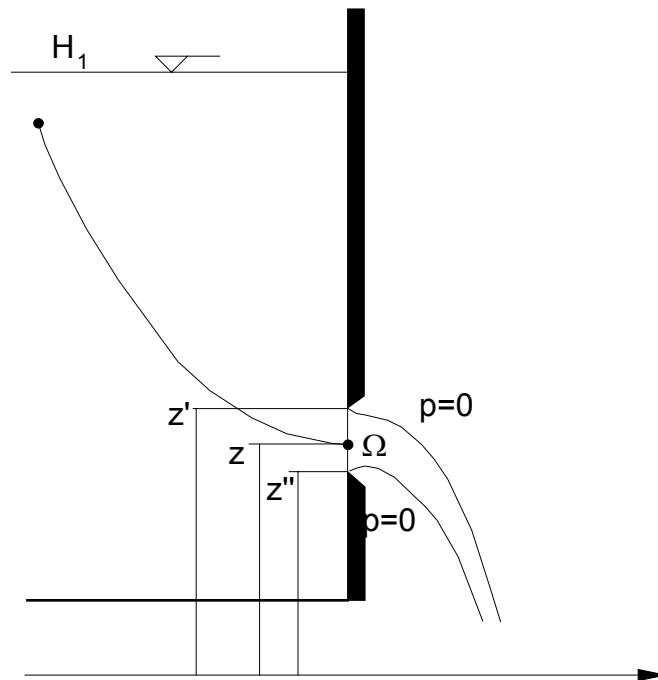


FIGURA 44

$$h_1 = \frac{U^2}{2g} + z$$

da cui:

$$U(z) = c_v \sqrt{2g(h_1 - z)} \quad (167)$$

Se la luce di sbocco ha una piccola estensione verticale, la portata può essere approssimata come:

$$Q = c_Q \Omega \sqrt{2g(h_1 - h_m)} \quad (168)$$

nella quale c_Q tiene conto delle perdite di carico e h_m è il carico piezometrico medio sulla sezione di sbocco e coincide con il carico piezometrico alla quota del centro di figura di tale sezione. Se la luce di sbocco ha una rilevante estensione verticale è necessario procedere invece per integrazione:

$$Q = \int_{z'}^{z''} U(z)b(z)dz \quad (169)$$

nella quale z' e z'' indicano le quote minima e massima della luce e $b(z)$ indica la larghezza della luce in funzione della quota.

6. CORRENTI A PELO LIBERO

Infra le dannose cagione degli umani beni, a me pare i fiumi, co' le superchie e impetuose inondazione, tenere il principato.

6.1. Generalità

Come si è già accennato nel capitolo precedente, sono definite correnti a pelo libero i moti di liquidi che hanno parte del contorno a contatto con l'atmosfera (la cosiddetta superficie libera). Rientrano in questa categoria i flussi in canali con sezioni aperte, negli alvei fluviali o nelle condotte con sezioni chiuse ma parzialmente riempite. Il fatto che sia presente una superficie libera, a pressione costante pari a quella atmosferica, consente di affermare che gli effetti della comprimibilità del fluido sono trascurabili ($\rho = \text{cost.}$). Dato il tipo di problemi che si affronta tipicamente con questo schema, si può ammettere che il moto avvenga in condizioni di turbolenza completamente sviluppata; di conseguenza il profilo di velocità sulle sezioni regolari si discosterà da quello parabolico, caratteristico dei flussi laminari, per assumere un andamento nel quale la velocità è nella maggior parte della sezione molto vicina alla velocità media. I coefficienti di ragguglio per i flussi di quantità di moto e di energia cinetica possono quindi essere posti uguali ad 1 senza commettere errori rilevanti. Ci si limiterà, in questa trattazione, allo studio di quei flussi nei quali l'inclinazione dell'asse rispetto all'orizzontale, θ , sia abbastanza piccola da poter confondere l'angolo con il suo seno ($\theta \ll 1$). Da questa ipotesi segue immediatamente che è possibile confondere le sezioni regolari con quelle verticali.

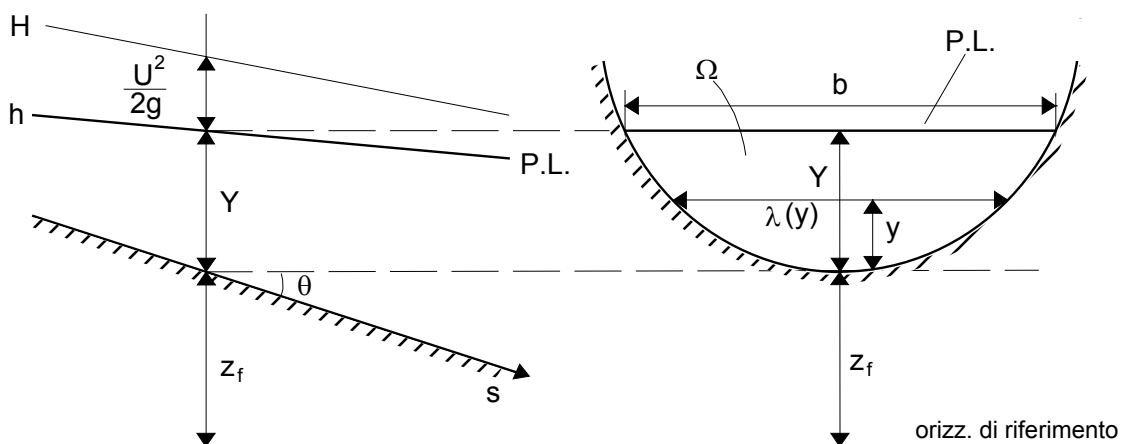


FIGURA 45

6.2. Carico specifico

Consideriamo una sezione regolare della corrente (Figura 45), indichiamo con z_f la quota del suo punto più basso e chiamiamo *linea di fondo* l'unione dei punti più bassi di tutte le sezioni regolari e con $i_f = -\partial z_f / \partial s$ la sua pendenza rispetto all'orizzontale. Si indica inoltre con Y la profondità della

corrente, ovvero la distanza tra il punto più basso e la superficie libera e con b la sua larghezza in corrispondenza del pelo libero.

Si è già accennato al fatto che la pressione al pelo libero coincide con quella atmosferica; se si utilizzano, come d'uso, le pressioni relative, esse si annullano su tale superficie. Il carico piezometrico resta dunque uguale a:

$$h = z_f + Y \cos \theta \approx z_f + Y,$$

essendo $\theta \ll 1$. Essa coincide quindi con la quota del pelo libero nella sezione in esame.

Si chiama *carico specifico* il carico totale riferito al fondo del canale:

$$E = H - z_f = Y + \frac{Q^2}{2g\Omega^2}. \quad (170)$$

La (170) stabilisce una relazione tra E , Q ed Y dal momento che l'area della sezione è funzione di Y . Fissata la portata, Q , l'andamento di E in funzione di Y è la somma di due termini: il primo (Y) lineare, il secondo ($Q^2/2g\Omega^2$) tende all'infinito per Y tendente a zero ($\Omega \rightarrow 0$) e a zero per Y tendente all'infinito ($\Omega \rightarrow \infty$).

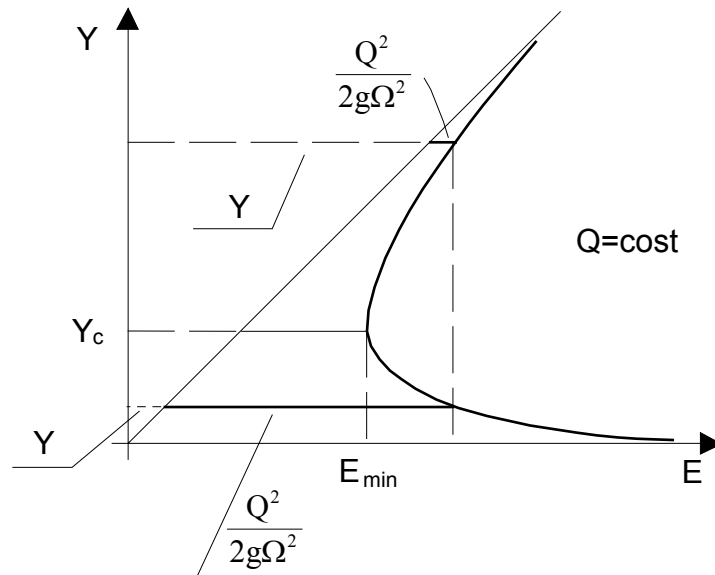


FIGURA 46

Nel diagramma di Figura 46 l'asse delle ascisse E e la bisettrice degli assi sono due asintoti per $E = E(Y)$; esiste quindi un minimo per il carico specifico E_{\min} per cui può passare la fissata portata Q , fissata; questo si realizza per un valore della profondità Y detta *profondità critica* Y_c . Per determinare tale valore si pone:

$$0 = \left(\frac{\partial E}{\partial Y} \right)_{Q=\text{cost}} = 1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} \frac{\partial \Omega}{\partial Y}. \quad (171)$$

D'altra parte l'area, Ω , della sezione è pari a:

$$\Omega = \int_0^Y \lambda(y) dy,$$

dalla quale si evince che:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial Y} = \lambda(Y) = b.$$

Sostituendo nella (171):

$$1 - \frac{Q^2}{g\Omega^3} b = 0;$$

quindi in corrispondenza delle condizioni critiche risulta:

$$\boxed{\left(\frac{\Omega^3}{b}\right)_c = \frac{Q^2}{g}} \quad (172)$$

Per una sezione rettangolare in cui $\Omega = b Y$, con $b = \text{cost.}$, risulta:

$$Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{gb^2}} \quad (173)$$

Per valori inferiori ad E_{\min} non può transitare la prefissata portata, per $E > E_{\min}$ sono possibili due valori di Y :

- $Y > Y_c$ la corrente si definisce *lenta*;
- $Y < Y_c$ la corrente si definisce *veloce*.

Se invece si fissa il carico specifico, E , si ha:

$$Q = \Omega \sqrt{2g(E - Y)} \quad (174)$$

la portata Q si annulla per $Y = 0$ ($\Omega=0$) e per $Y = E$ (Figura 47). La portata è massima quando si annulla la derivata:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_{E=\text{cost}} = \frac{\partial \Omega}{\partial Y} \sqrt{2g(E - Y)} - \frac{\Omega g}{\sqrt{2g(E - Y)}} = 0;$$

quindi il massimo della portata si ha per:

$$Y_c + \left[\frac{\Omega}{2b}\right]_{Y=Y_c} = E. \quad (175)$$

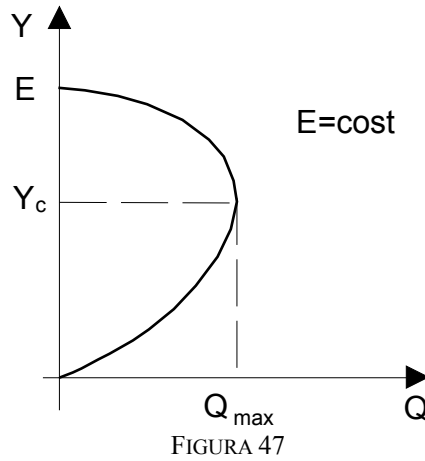
Se indichiamo con $Y_m = \Omega/b$ la profondità media, la precedente diventa:

$$\boxed{Y_c + \frac{1}{2} Y_{mc} = E} \quad (176)$$

intendendo con Y_{mc} la profondità media calcolata in condizioni critiche. Questa equazione fornisce l'altezza critica per un assegnato carico specifico E . Nel caso di sezione rettangolare $Y_{mc} = Y_c$, quindi:

$$Y_c = \frac{2}{3} E. \quad (177)$$

Anche in questo caso, fissata una portata, si individuano due possibili valori della profondità della corrente: uno minore di Y_c , che corrisponde ad un moto in condizioni di corrente veloce, ed uno maggiore di Y_c , che corrisponde ad una corrente lenta.



6.3. Celerità

Per comprendere le diverse caratteristiche che presentano le correnti veloci e quelle lente, che sinora sono state definite ed individuate sulla base di criteri energetici, è necessario fare riferimento al concetto di *celerità*. Si definisce celerità la velocità con la quale si propaga una perturbazione infinitesima del pelo libero di una corrente. Poiché qualsiasi variazione di una condizione al contorno, corrisponde a determinare una perturbazione della corrente, la celerità rappresenta la velocità con la quale si propagano gli effetti di questa variazione. In questo senso essa può essere intesa come velocità di trasmissione dell'informazione nel campo di moto.

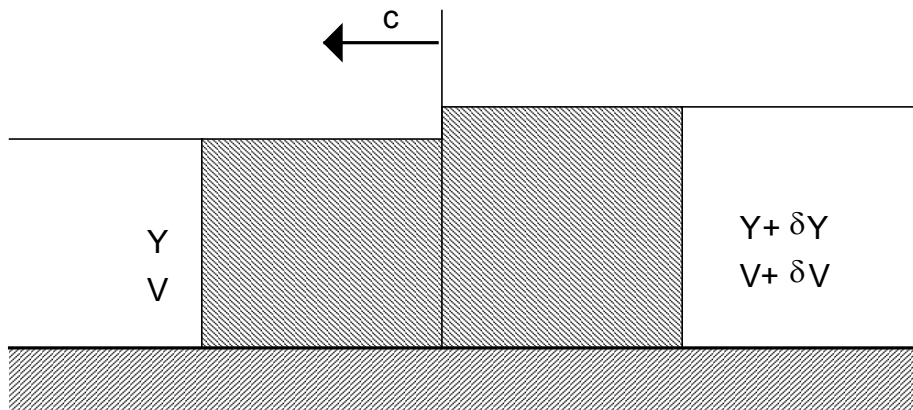


FIGURA 48

Per determinarla consideriamo, a titolo esemplificativo, una corrente gradualmente variata a sezione rettangolare orizzontale, con profondità Y , nella quale sia presente una piccola perturbazione δY della profondità, tale che $\delta Y/Y \ll 1$, che porti il fluido ad una profondità $Y = Y + \delta Y$. Poniamoci in un sistema di riferimento solidale con la perturbazione, ed individuiamo un volume di controllo delimitato da due sezioni, abbastanza lontane dalla perturbazione da poter essere considerate regolari (Figura 48).

L'equazione globale di bilancio della massa, che esprime la costanza della portata su queste due sezioni, essendo queste rettangolari, risulta:

$$V Y = (V + \delta V) (Y + \delta Y),$$

avendo diviso tutto per la larghezza del canale, ed indicando con V la velocità del fluido relativa alla perturbazione. Trascurando i termini di ordine superiore, nell'ipotesi che anche $\delta V/V \ll 1$, da questa deriva:

$$\delta Y = -Y \delta V/V. \quad (178)$$

L'equazione globale del moto, proiettata in direzione orizzontale è:

$$I_x + M_x = \Pi_x + G_x \quad (179)$$

ma I_x è nulla perché il fenomeno è stazionario nel sistema di riferimento scelto e G_x è nulla perché la forza di gravità non ha componente orizzontale. Se trascuriamo gli effetti degli sforzi viscosi alla parete, data la brevità del tratto considerato, e, nelle ipotesi di flusso quasi-unidimensionale, la risultante delle forze di superficie è dovuta alla pressione sulle due sezioni a monte ed a valle che delimitano il volume di controllo. Sulla sezione a monte della perturbazione la risultante delle pressioni è data dal prodotto della pressione calcolata nel baricentro della sezione ($\gamma Y/2$) per l'area di tale superficie ($Y L$), essendo L la larghezza del canale; analogamente si ottiene la risultante per la sezione a valle, per cui:

$$\frac{\Pi_x}{L} = \gamma \frac{Y^2}{2} - \gamma \frac{(Y + \delta Y)^2}{2}. \quad (180)$$

D'altra parte il flusso di quantità di moto è dato da:

$$\frac{M_x}{L} = \rho Q \delta V;$$

nella quale $Q = Y V$ è la portata per unità di larghezza. Quindi l'equazione globale per unità di larghezza si scrive:

$$\gamma \frac{Y^2}{2} - \gamma \frac{(Y + \delta Y)^2}{2} = \rho Q \delta V;$$

la quale, trascurando gli infinitesimi di ordine superiore si riduce a:

$$-g Y \delta Y = Q \delta V. \quad (181)$$

Sostituendo la (178) nella (181) si ottiene infine la velocità V con la quale il fluido si muove rispetto alla perturbazione. Essa coincide, a meno del segno (che in questo caso è irrilevante), con la velocità della perturbazione rispetto al fluido, ovvero la *celerità relativa*, che indicheremo con c :

$$c = \pm \sqrt{gY}.$$

Nel caso più generale, di sezione non rettangolare, si può dimostrare che questa formula diventa:

$$\boxed{c = \pm \sqrt{gY_m}}. \quad (182)$$

Riprendiamo ora l'equazione che definisce le condizioni critiche (172) e ricaviamo la velocità che si ha in queste condizioni, detta velocità critica:

$$U_c = \frac{Q_c}{\Omega_c} = \sqrt{g \frac{\Omega_c}{b_c}} = \sqrt{g Y_{mc}} \quad (183)$$

e rappresenta proprio la velocità con la quale si muove una piccola perturbazione nella corrente.

Se immaginiamo che il fluido non sia in quiete ma si muova con velocità media V , la celerità di una perturbazione rispetto ad un sistema di riferimento fisso, detta *celerità assoluta*, è data da:

$$a = U \pm \sqrt{g Y_m}; \quad (184)$$

dalla quale si evince che se $U > c$, cioè nel caso di corrente veloce, le perturbazioni prodotte in un certo punto non possono risalire verso monte perché sono trascinate a valle con una velocità superiore alla celerità con cui si propagano verso monte. Questo fatto porta alla conseguenza che lo stato della corrente in una sezione può essere influenzato solo da ciò che accade a monte e non da ciò che succede a valle della sezione stessa. Nel caso in cui invece la velocità della corrente $U < c$, ovvero per corrente lenta, le perturbazioni si propagano anche verso monte e lo stato di una sezione dipende sia dalle condizioni di monte che da quelle di valle.

Possiamo quindi definire un gruppo adimensionale, il *numero di Froude* che ci permette di identificare se un corrente è lenta o veloce, ovvero se la velocità è inferiore o superiore a quella di propagazione delle perturbazioni:

$$F_r = \sqrt{\frac{U^2}{g Y_m}} = \sqrt{\frac{U^2 b}{g \Omega}}; \quad (185)$$

per $Fr < 1$ la corrente è lenta, per $Fr > 1$ la corrente è veloce.

6.4. Moto uniforme

Nel caso di moto uniforme, in cui la distribuzione delle velocità è la stessa in ogni sezione, la pendenza di fondo, la pendenza piezometrica e la pendenza dei carichi totali sono le stesse:

$$i_f = i = j. \quad (186)$$

Per valutare le perdite di carico nella corrente a pelo libero si può utilizzare la *relazione di Chezy*:

$$j = \frac{U^2}{\chi^2 R_i} \quad (187)$$

che può essere ricondotta alla relazione di Darcy-Weisbach:

$$i_f = j = \frac{\lambda}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (188)$$

qualora si ponga:

$$\chi = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}} \quad (189)$$

La valutazione di χ o λ in funzione della scabrezza equivalente può essere effettuata attraverso una delle formule empiriche che sono state proposte da diversi autori per il caso di turbolenza completamente sviluppata. Ad esempio si può utilizzare la *relazione di Gauckler-Strickler*:

$$\chi = k_s R_i^{1/6} \quad (190)$$

Può inoltre essere tenuto in conto della forma della sezione adottando opportuni coefficienti correttivi.

L'equazione (187), utilizzando l'uguaglianza tra pendenza del carico totale e pendenza del fondo in condizioni di moto uniforme, permette di ottenere una legge che lega la pendenza dell'alveo e la profondità della corrente alla velocità od alla portata:

$$U = \chi \sqrt{R_i i_f} \quad ; \quad Q = \chi \Omega \sqrt{R_i i_f} \quad (191)$$

Introducendo la *portata ridotta*, $Q/\sqrt{i_f}$, e portando a secondo membro tutti i termini dipendenti dalla profondità della corrente, Y , si ottiene la cosiddetta *scala di deflusso*:

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \chi \Omega \sqrt{R_i} \quad (192)$$

ovvero una relazione che permette di misurare la portata di una corrente misurando la profondità in un tratto nel quale si ritiene il moto sia uniforme. A parità di portata, la profondità della corrente in moto uniforme diminuisce all'aumentare di i_f , mentre aumenta aumentando la scabrezza dell'alveo.

Per sezioni aperte, tipo rettangolari o trapezoidali, la sezione S e raggio idraulico R aumentano all'aumentare di Y e dunque la portata ridotta è una funzione monotona crescente di Y_u (Figura 49).

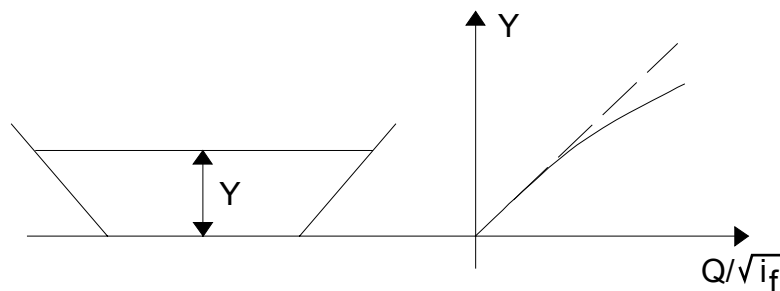


FIGURA 49

Nel caso di sezioni chiuse, il raggio idraulico ha un massimo che dà luogo ad un massimo anche nella scala di deflusso. Ad esempio, nel caso di sezione circolare si ha (Figura 50):

$$\Omega = \frac{1}{2} r_0^2 (\phi - \sin \phi) \quad ; \quad B = r_0 \phi \quad ; \quad R_i = \frac{\Omega}{B} = \frac{1}{2} r_0 \left(1 - \frac{\sin \phi}{\phi} \right)$$

Nel caso di un alveo con banchine laterali (*golene*, Figura 51) e, in generale, di sezioni composite, in cui le diverse porzioni possono avere scabrezze anche molto diverse tra loro, la portata è valutata suddividendo l'alveo in più parti secondo lo schema riportato in figura. A ciascuna parte si applica l'equazione di Chézy:

$$U_k = \chi_k \sqrt{R_{ik} i_f} = \chi_k (Y_u) \sqrt{\frac{\Omega_k (Y_u)}{B_k (Y_u)} i_f} ; \quad (193)$$

essendo le grandezze con pedice k relative alla k-esima porzione della sezione. Tutte le porzioni devono avere il pelo libero esattamente alla stessa quota, quindi le grandezze come Ω_k , B_k , e χ_k sono tutte esprimibili come funzione di un'unica profondità (quella della porzione più profonda), Y_u .

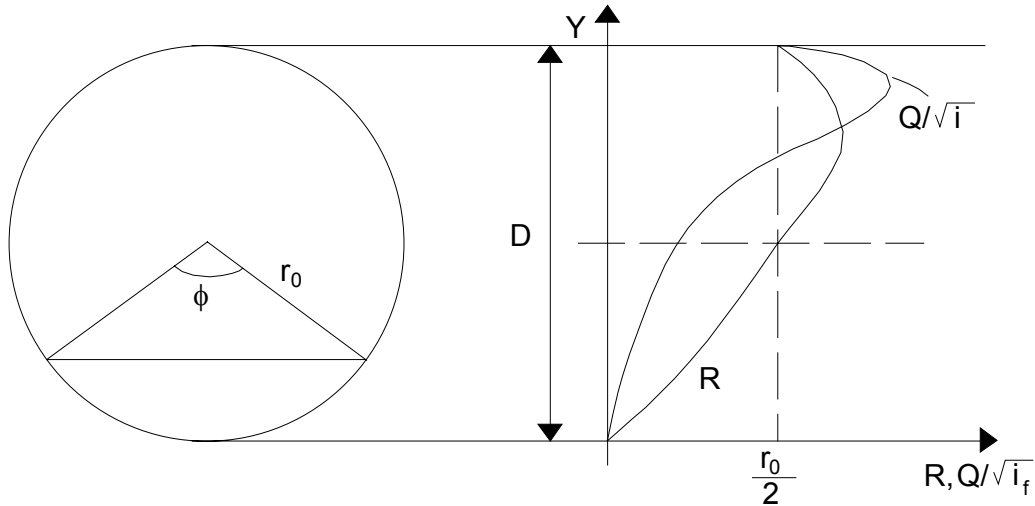


FIGURA 50

La scala di deflusso, che mette in relazione la portata complessiva, Q , con la profondità, Y_u , risulta quindi, in questo caso:

$$\frac{Q}{\sqrt{i_f}} = \sum_k \chi_k (Y_u) \sqrt{\frac{\Omega_k^3 (Y_u)}{B_k (Y_u)}}. \quad (194)$$

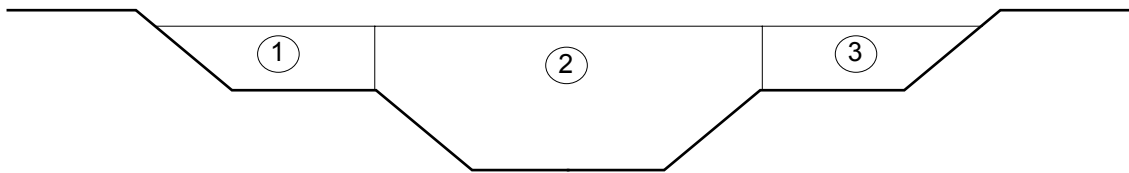


FIGURA 51

In base alla legge del moto uniforme è possibile individuare, per un alveo, una *pendenza critica*, i_c , ovvero la pendenza del fondo per la quale il moto uniforme avviene in condizioni critiche. Utilizzando la relazione di Chèzy si ha, per un alveo a pendenza critica:

$$U_c^2 = \chi^2 R_i i_c;$$

sostituendo in questa equazione l'espressione della velocità critica (183), si ottiene:

$$i_c = \frac{g\Omega}{\chi^2 b R_i} \quad (195)$$

Se la pendenza del fondo è minore della pendenza critica l'alveo si definisce a *debole pendenza*, se la pendenza del fondo è invece superiore a quella critica, l'alveo si definisce a *forte pendenza*. Nel

primo caso il moto uniforme si ha in regime di corrente lenta ($Y_u > Y_c$) mentre nel secondo caso il moto uniforme si ha con corrente veloce ($Y_u < Y_c$).

6.5. Fenomeni di efflusso libero

6.5.1. Luce in parete verticale

Consideriamo il caso di efflusso attraverso una parete verticale, sottile, nella quale sia stata praticata una apertura. Supponiamo inoltre che l'efflusso avvenga in un fluido di densità molto minore, per esempio acqua che fluisce in aria (Figura 52). Il problema si affronta in modo esattamente analogo a quanto fatto nel caso di efflusso libero nel paragrafo 5.2.9. Se si indica con ζ l'affondamento di un generico punto rispetto alla quota del pelo libero, possiamo scrivere la relazione per la velocità, (167), come:

$$U(z) = c_v \sqrt{2g\zeta} \quad (196)$$

mentre la portata sarà, nel caso di piccola luce:

$$Q = c_Q \Omega \sqrt{2g\zeta_m} \quad (197)$$

(con ζ_m affondamento del centro di figura della luce), mentre nel caso di luce ampia si dovrà, al solito integrare per le diverse altezze secondo la (169). Nel caso di luce rettangolare di larghezza b , e supponendo costante il coefficiente riduttore della portata c_Q su tutta la sezione, l'integrale diventa:

$$Q = \frac{2}{3} c_Q \sqrt{2g} (\zeta_2^{3/2} - \zeta_1^{3/2}) b \quad (198)$$

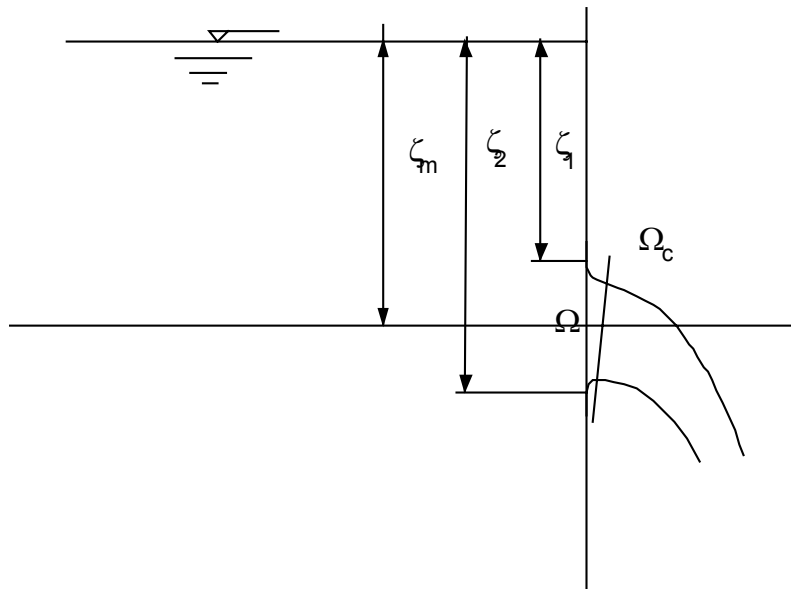


FIGURA 52

6.5.2. Paratoia a battente

Nel caso un canale sia regolato attraverso una paratoia alzata a battente la formulazione del problema è leggermente diversa dalla precedente. Nella sezione contratta infatti si può supporre che

il moto sia quasi-unidimensionale e quindi essa sia una sezione regolare. La trattazione è allora analoga al caso di efflusso libero in un liquido di pari densità, trattata nel paragrafo 5.2.9. Consideriamo per semplicità un canale rettangolare largo b nella quale sia alzata una paratoia di una altezza a (Figura 53). Se trascuriamo le perdite di carico distribuite, l'equazione dell'energia per le correnti ci dà:

$$Y + \frac{U^2}{2g} = a_c + \frac{U_c^2}{2g}; \quad (199)$$

l'equazione di continuità inoltre fornisce la relazione:

$$U = a_c U_c / Y. \quad (200)$$

Utilizzando la definizione di coefficiente di contrazione, $k = a_c/a$, che per $a/Y \ll 1$ può porsi uguale a 0.61, e sostituendo la (200) nella (199) otteniamo un'espressione per la velocità:

$$U_c = \sqrt{\frac{1}{1+k\frac{a}{Y}}} \sqrt{2gY}; \quad (201)$$

La quale va moltiplicata per un coefficiente riduttore della velocità, c_v , se si vuole tener conto delle perdite di carico tra la sezione di monte e la sezione contratta. La portata è invece, tenendo conto di questo coefficiente:

$$Q = \Omega c_v k \sqrt{\frac{1}{1+k\frac{a}{Y}}} \sqrt{2gY} = \Omega c_Q \sqrt{2gY} \quad (202)$$

con $\Omega = a b$. Dalla quale resta definito il coefficiente di portata per la paratoia a battente:

$$c_Q = k c_v \sqrt{\frac{1}{1+k\frac{a}{Y}}} \quad (203)$$

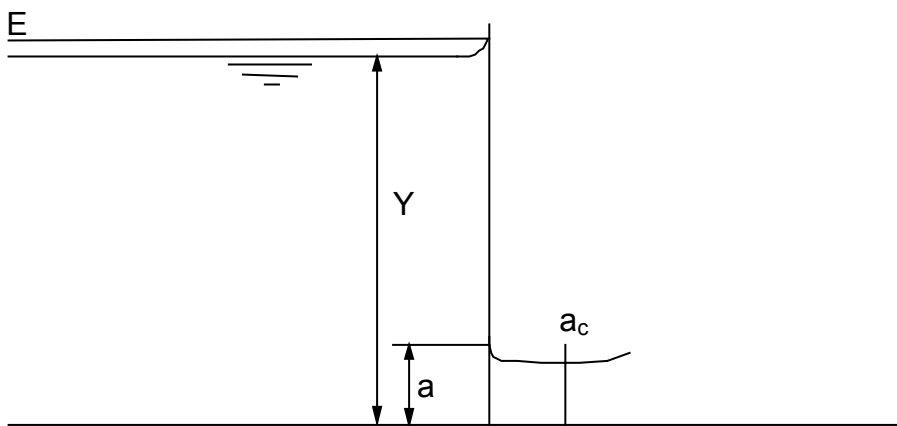


FIGURA 53

6.5.3. Stramazzo in parete sottile

Lo stramazzo in parete sottile può essere considerato un caso limite di luce rettangolare, di

$$Q = \frac{2}{3\sqrt{3}} b \zeta \sqrt{2g\zeta} \quad (207)$$

che può essere espressa nella forma generale:

$$Q = c_Q b \zeta \sqrt{2g\zeta} \quad (208)$$

ponendo $c_Q = \frac{2}{3\sqrt{3}} = 0.385$. Questo tipo di stramazzo è detto *Stramazzo Belanger*.

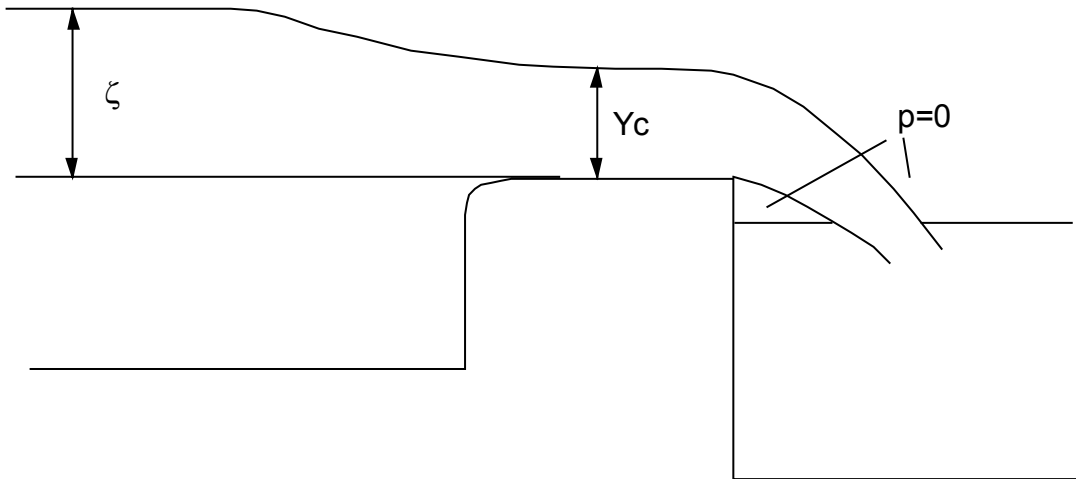


FIGURA 55

6.6. Profili di rigurgito

Nella realtà i casi nei quali si presenta un moto uniforme nelle correnti a pelo libero sono molto rari, per cui la trattazione che precede deriva la sua importanza più che dalla sua effettiva applicabilità, dal fatto che, anche in caso di corrente gradualmente variata, le perdite di carico si assumono pari a quelle stimate in pari condizioni locali per una corrente uniforme, e dal fatto che spesso i canali sono comunque progettati in base alle leggi del moto uniforme. Affrontiamo ora il problema di determinare l'andamento della profondità di una corrente a pelo libero gradualmente variata, che si discosti dal moto uniforme. Per semplicità facciamo riferimento al caso di alveo cilindrico, ovvero nel quale la sua forma non dipende dall'ascissa s . In questo caso le variazioni di sezione, Ω , della corrente sono dovute solo a variazioni della profondità $Y(s)$:

$$\Omega = \Omega(Y(s));$$

quindi nel caso di moto permanente, nel quale l'equazione di continuità impone che la portata sia costante, anche il carico specifico

$$E = Y(s) + \frac{Q^2}{2g\Omega^2(Y(s))}$$

è una funzione dell'ascissa curvilinea solo attraverso la profondità $Y(s)$.

Dalla definizione di carico specifico:

$$E = H - z_f$$

si ha:

$$\frac{dE(Y(s))}{dY} \frac{dY(s)}{ds} = i_f - j \quad (209)$$

quindi:

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{j}{i_f}}{\frac{dE}{dY}} \quad (210)$$

Il denominatore del secondo membro è:

$$\frac{dE}{dY} = \frac{d}{dY} \left(\frac{Q^2}{2g\Omega^2} + Y \right) = 1 - \frac{Q^2 b}{g\Omega^3} \quad (211)$$

avendo tenuto conto del fatto che $\Omega = \text{cost.}$ e che $d\Omega/dY = b$. Sostituendo nella precedente e tenendo conto della definizione del numero di Froude si ottiene:

$$\frac{dY}{ds} = i_f \frac{1 - \frac{j}{i_f}}{1 - F_r^2} \quad (212)$$

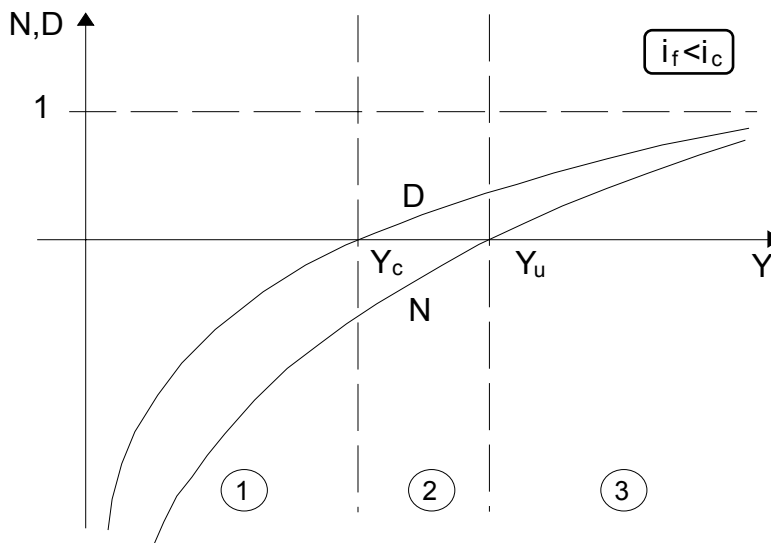


FIGURA 56

che è l'equazione differenziale del pelo libero per correnti gradualmente variate. Per discuterne l'andamento consideriamo separatamente numeratore e denominatore. Al limite per $Y \rightarrow \infty$ la velocità tende a zero, e la stessa cosa accadrà per le perdite di carico j , che possono essere stimate, al solito, con la relazione di Chézy; il numeratore tenderà dunque ad 1. Sempre in base alla relazione di Chézy, si evince che per $Y \rightarrow 0$ il numeratore tende a $-\infty$. Mentre l'equazione del moto uniforme, (186), impone l'uguaglianza di j ed i_f per $Y = Y_u$. Il denominatore invece si annulla per $F_r = 1$, ovvero in condizioni critiche, nelle quali $Y = Y_c$. Se si osserva che il numero di Froude è esprimibile come il rapporto U/U_c , tra la velocità e la velocità critica, si possono ricavare gli andamenti asintotici anche per il denominatore: per $Y \rightarrow 0$ la velocità $U \rightarrow \infty$, quindi il denominatore

tende a $-\infty$, mentre per $Y \rightarrow \infty$ la velocità $U \rightarrow 0$ quindi il denominatore tende ad 1. I diagrammi che rappresentano queste funzioni sono diverse a seconda che l'alveo sia a debole od a forte pendenza. Infatti nel primo caso si ha $Y_u > Y_c$ mentre nel secondo caso accade il contrario. Nella Figura 56 e nella Figura 57 è riportato l'andamento del numeratore, N, e del denominatore, D, nel caso rispettivamente di alvei a debole e a forte pendenza.

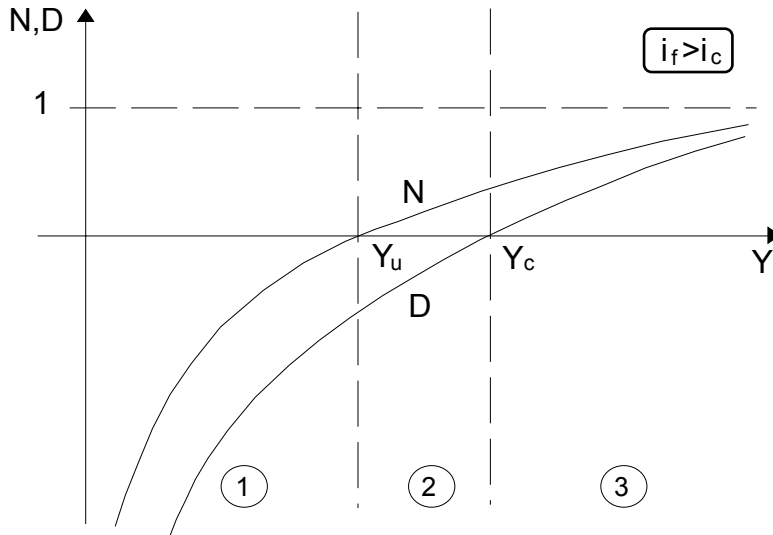


FIGURA 57

Suddiviso il diagramma in tre zone si può notare:

- in corrispondenza dell'altezza di moto uniforme Y_u si ha $dY/ds = 0$;
- in corrispondenza dell'altezza critica Y_c si ha $dY/ds = \infty$;
- nella zona ① N e D sono negativi e quindi dY/ds è positivo: la corrente è rallentata;
- nella zona ② N e D sono di segno opposto e quindi dY/ds è negativo: la profondità diminuisce e quindi, a parità di portata la corrente è accelerata;
- nella zona ③ N e D sono entrambi positivi e quindi dY/ds è positivo: la corrente è rallentata;
- per Y tendente all'infinito dY/ds tende a i_f .

Nella Figura 58 sono riportati gli andamenti di Y in funzione di s (profili di rigurgito) rispettivamente nel caso di alveo a debole pendenza ed a forte pendenza. Sono state tratteggiate quelle parti delle curve (per Y prossimo allo zero e al valore critico) dove non risultano verificate le condizioni di graduale variazione della corrente che sono alla base della trattazione effettuata. Si indicano, rispettivamente con D_1, D_2 ed D_3 i 3 profili in alveo a debole pendenza, e con F_1, F_2 ed F_3 quelli caratteristici dell'alveo a forte pendenza.

In accordo con le considerazioni fatte in precedenza sulla propagazione delle perturbazioni nelle correnti lente e veloci, si può notare che i profili sopra individuati vanno tracciati da monte verso valle per tutti i casi di corrente veloce ($Y < Y_c$), ovvero quelli nei quali le perturbazioni viaggiano solo verso valle e quindi non influenzano quello che succede a monte, vanno invece tracciati da valle verso monte ogni qual volta la corrente è lenta ($Y > Y_c$) e quindi ciò che accade a valle può influenzare lo stato del flusso più a monte.

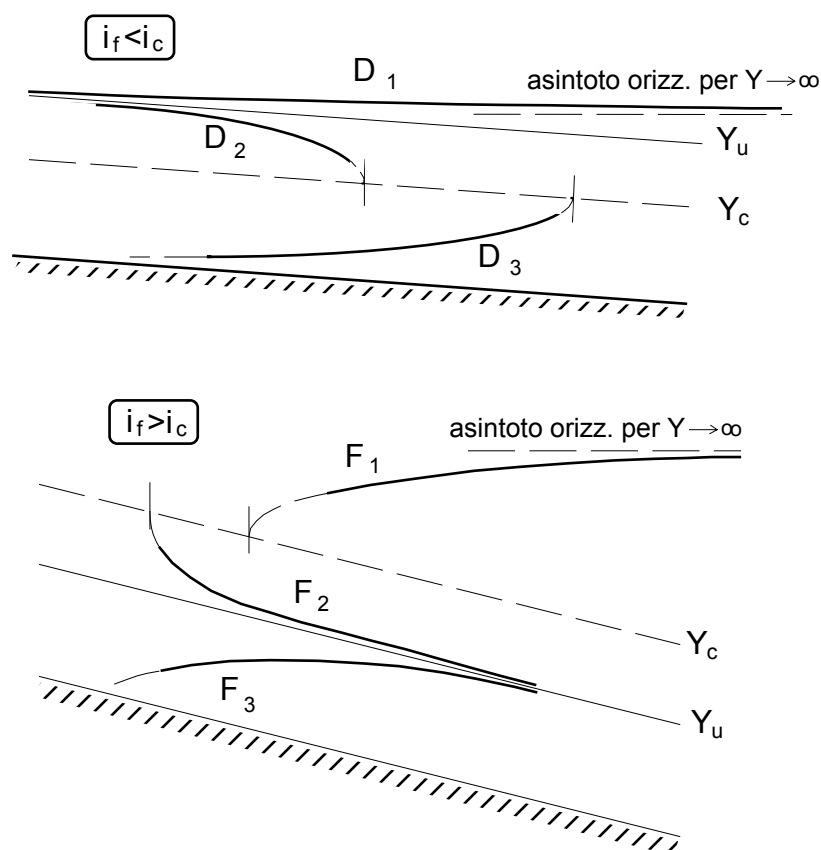


FIGURA 58

6.7. Transizione attraverso lo stato critico

Osservando i profili discussi più sopra si può comprendere come l'unica transizione attraverso lo stato critico che può avvenire senza discontinuità è quella tra corrente lenta e corrente veloce, dovuta ad una variazione della pendenza del fondo. Consideriamo un alveo caratterizzato da una pendenza iniziale $i_{f1} < i_c$, che abbia una variazione improvvisa di pendenza che la porti a $i_{f2} > i_c$ (Figura 59).

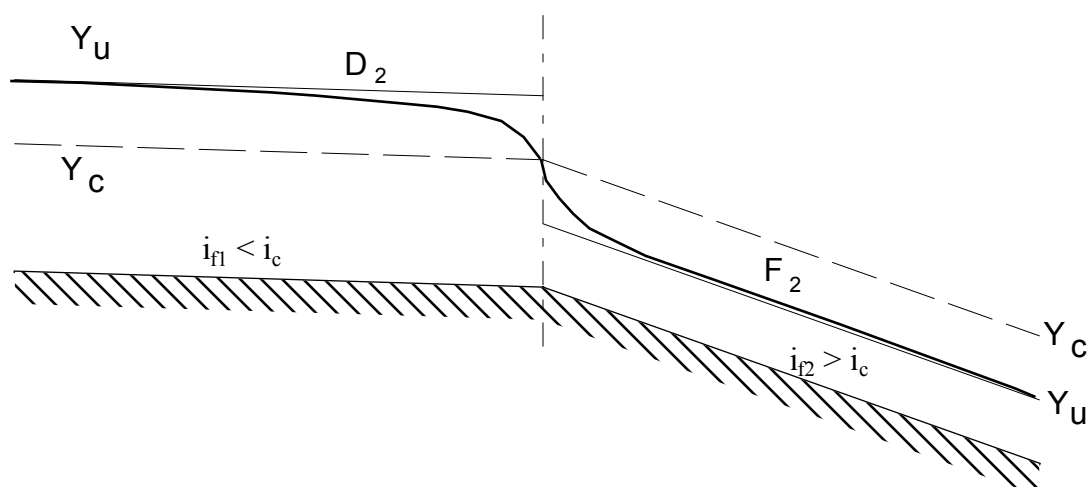


FIGURA 59

In questo caso la perturbazione generata dalla variazione di pendenza è a valle della corrente lenta, che può essere governata da valle, ed a monte di quella veloce, che è necessariamente controllata da

monte. Dalla sezione di variazione, nella quale si trova l'altezza critica, partono due profili, uno di corrente lenta verso monte ed uno di corrente veloce verso valle, che tendono entrambi alla condizione di corrente indisturbata, ovvero al moto uniforme. Come conseguenza, la sezione attraverso la quale avviene il passaggio dallo stato critico è indipendente sia dalle condizioni di monte sia da quelle di valle. Per questo motivo è detta una *sezione di controllo*. In effetti, conoscendo la profondità della corrente in questa sezione è possibile risalire immediatamente alla portata effluente per mezzo della relazione (172), senza conoscere le condizioni di valle o di monte.

6.8. Risalto idraulico

La transizione tra corrente veloce e corrente lenta non può avvenire invece in modo continuo perché l'informazione che riguarda la presenza di una corrente lenta più a valle della transizione non può risalire verso monte. La corrente arriva dunque indisturbata fino alla transizione che avviene in modo brusco e fortemente dissipativo attraverso quello che viene chiamato un *risalto idraulico*. In corrispondenza del risalto si forma una zona fortemente vorticoso, spesso con frangimento del pelo libero, alla quale corrisponde una rilevante dissipazione di energia Figura 60.



FIGURA 60

Consideriamo il tratto di alveo nel quale si genera questo fenomeno ed ipotizziamo che per tale tratto, l'alveo possa essere considerato cilindrico (Figura 61).

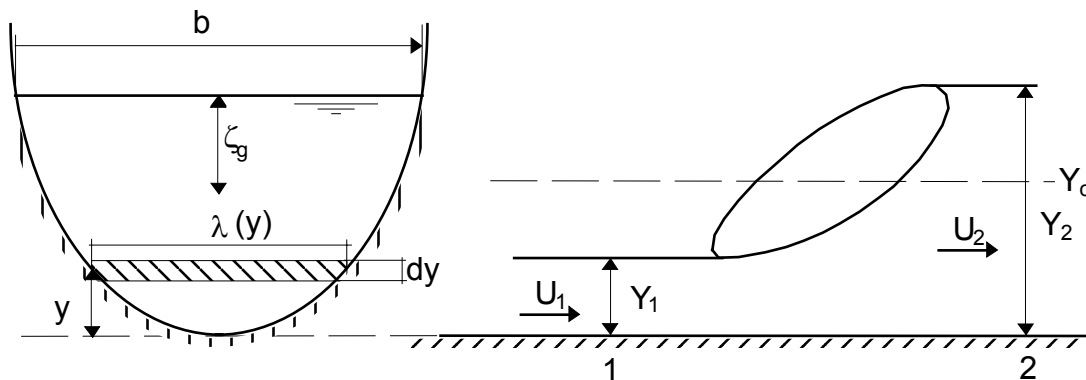


FIGURA 61

Per trovare una relazione tra le profondità a monte ed a valle del risalto applichiamo ad un volume V_c , compreso tra una sezione, Ω_1 , a monte, ed una, Ω_2 , a valle, che possano essere considerate

regolari, l'equazione globale di bilancio della quantità di moto (36), proiettata lungo l'asse del canale:

$$I_s + M_s = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_L + G_s. \quad (213)$$

dove Π_1 è la proiezione lungo la direzione dell'asse degli sforzi totali sulla superficie in Ω_1 , Π_2 quella sulla superficie Ω_2 , e Π_L quella sulla superficie laterale del volume di controllo. Il primo termine è nullo perché il fenomeno è stazionario, il secondo è dato da:

$$M_s = -\beta\rho U_1^2 \Omega_1 + \beta\rho U_2^2 \Omega_2 \quad (214)$$

nella quale porremo, essendo il moto turbolento, $\beta = 1$. Sulle superficie Ω_1 ed Ω_2 si assume, analogamente a quanto fatto nel ricavare la relazione di Bordà, che lo sforzo totale $\tau_{Tss} \sim -p$. Supponiamo inoltre che la distribuzione delle pressioni sia idrostatica, essendo le sezioni regolari. Quindi avremo:

$$\begin{cases} \Pi_1 = \gamma\zeta_{g1}\Omega_1 \\ \Pi_2 = -\gamma\zeta_{g2}\Omega_2 \end{cases}; \quad (215)$$

con riferimento alle quantità definite in Figura 61, l'affondamento del baricentro ζ_g della generica sezione si calcola come:

$$\zeta_g = Y - \frac{1}{\Omega} \int_0^Y \lambda(y)ydy. \quad (216)$$

Gli effetti dello sforzo tangenziale alla superficie laterale, Π_L , saranno invece trascurati poiché danno luogo ad una dissipazione di energia molto minore di quella associata alla presenza del risalto; infine le forze di massa sono trascurate poiché danno luogo ad una componente molto piccola nella direzione dell'asse. Avremo dunque:

$$-\rho U_1^2 \Omega_1 + \rho U_2^2 \Omega_2 = \gamma\zeta_{g1}\Omega_1 - \gamma\zeta_{g2}\Omega_2$$

quindi la quantità:

$$S(Y) = \rho \frac{Q^2}{\Omega} + \gamma\zeta_g \Omega, \quad (217)$$

detta *spinta totale*, si conserva tra le sezioni di monte e di valle del risalto. Nel caso di sezione rettangolare L'andamento di $S(Y)$ può essere ricostruito dalla somma dei due termini che compaiono nella precedente espressione (Figura 62).

Il valore minimo di $S(Y)$ si ottiene dalla seguente relazione:

$$\frac{dS}{dY} = 0 = -\frac{\rho Q^2}{\Omega^2} \frac{\partial \Omega}{\partial Y} + \gamma \int_0^b y db = -\frac{\rho Q^2}{\Omega^2} b + \gamma \Omega$$

e quindi:

$$0 = 1 - \frac{Q^2 b}{\Omega^3 g} = 1 - F_r^2 \quad (218)$$

il punto di minimo per S si ha proprio in condizioni critiche.

La curva $S(Y)$ permette di valutare la profondità della corrente a valle del risalto una volta nota quella di monte o viceversa: a partire dalle caratteristiche della sezione e dalla portata si può disegnare una curva come quella in Figura 62: una volta nota una profondità, per esempio a monte del risalto, Y_1 , si ricava il valore della spinta. La seconda intersezione tra la curva e una retta $S = \text{cost.}$ individua l'altezza che si ha a valle del risalto. Le altezze Y_1 ed Y_2 sono dette *altezze coniugate* poiché corrispondono a due diverse condizioni, di corrente veloce e di corrente lenta, nelle quali la corrente ha la stessa spinta totale.

In caso di alveo rettangolare la spinta totale assume l'espressione:

$$S = \gamma \frac{Y^2 b}{2} + \rho \frac{Q^2}{Yb} \quad (219)$$

ed imponendo che rimanga costante attraverso il risalto si ricava la relazione tra la profondità a monte, Y_1 , ed a valle, Y_2 :

$$Y_1 + Y_2 = \frac{2Y_c^3}{Y_1 Y_2} \quad (220)$$

Si può ricavare inoltre la variazione di energia specifica attraverso il risalto:

$$E_1 - E_2 = \frac{(Y_2 - Y_1)^3}{4Y_1 Y_2} \quad (221)$$

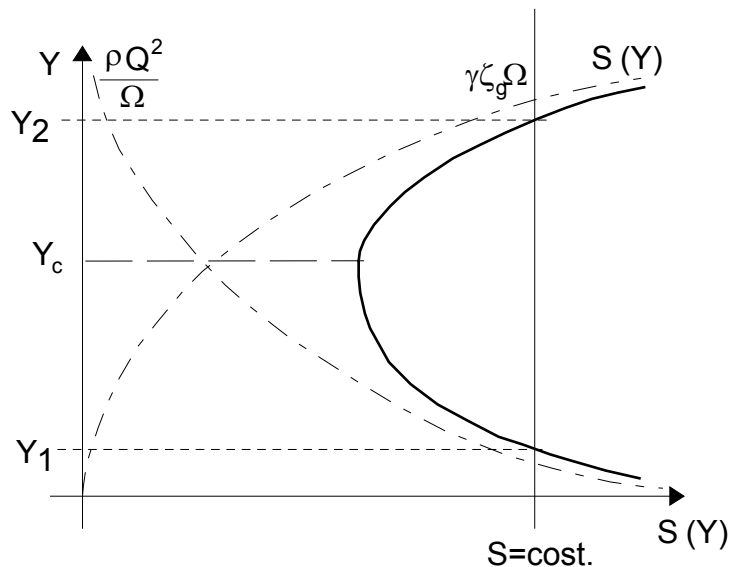


FIGURA 62

6.9. Variazione di pendenza

Consideriamo una transizione da corrente veloce a corrente lenta dovuta alla variazione della pendenza dell'alveo da forte a debole. Supponiamo che non vi siano in prossimità altre cause di perturbazione per cui la corrente si a monte che a valle del risalto si trova in condizioni di moto uniforme. In conseguenza delle diverse caratteristiche che può avere l'alveo il risalto può essere localizzato a monte od a valle della variazione di pendenza. Per determinare quale dei due casi si

verifica è necessario confrontare la spinta totale di monte con quella di valle: se la spinta di monte è superiore a quella di valle il risalto avviene a valle, altrimenti a monte.

Nel primo caso (Figura 63) infatti la profondità coniugata del moto uniforme a monte, Y_{u1}^* , è maggiore dell'altezza del moto uniforme di valle, Y_{u2} ; di conseguenza vi è intersezione tra il profilo di valle (Y_{u2}) ed il coniugato di quello che proviene da monte (D_3^*). Non vi è, invece, intersezione tra il profilo di monte (Y_{u1}) ed il coniugato del profilo proveniente da valle (F_1^*). La corrente arriva in condizioni di moto uniforme fino alla variazione di pendenza; immediatamente a valle di questa sezione si trova ad essere una corrente veloce in un alveo a debole pendenza, quindi segue un profilo del tipo D_3 fino a quando la profondità coniugata non corrisponde alla profondità di moto uniforme per quell'alveo. In quel punto avviene la transizione a moto uniforme attraverso il risalto.

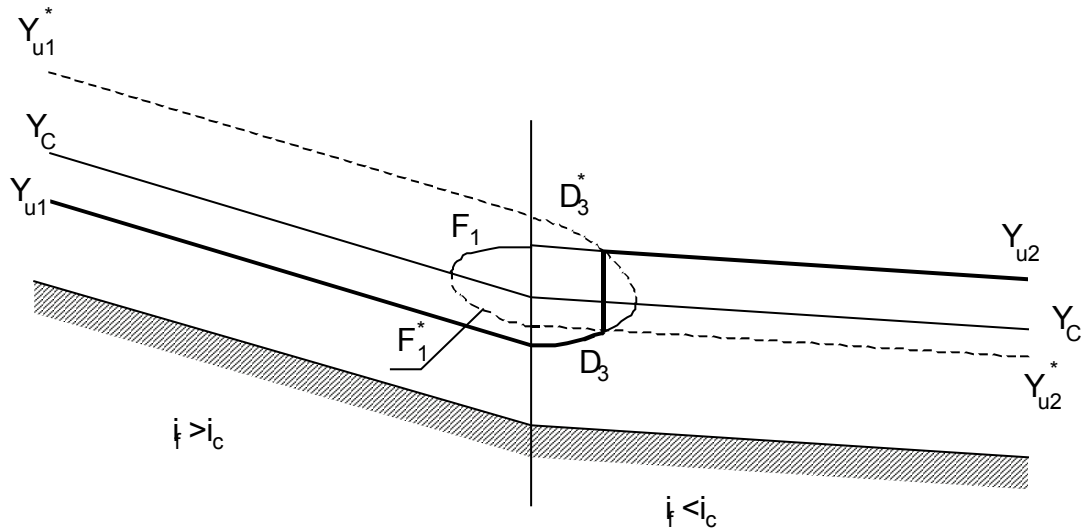


FIGURA 63

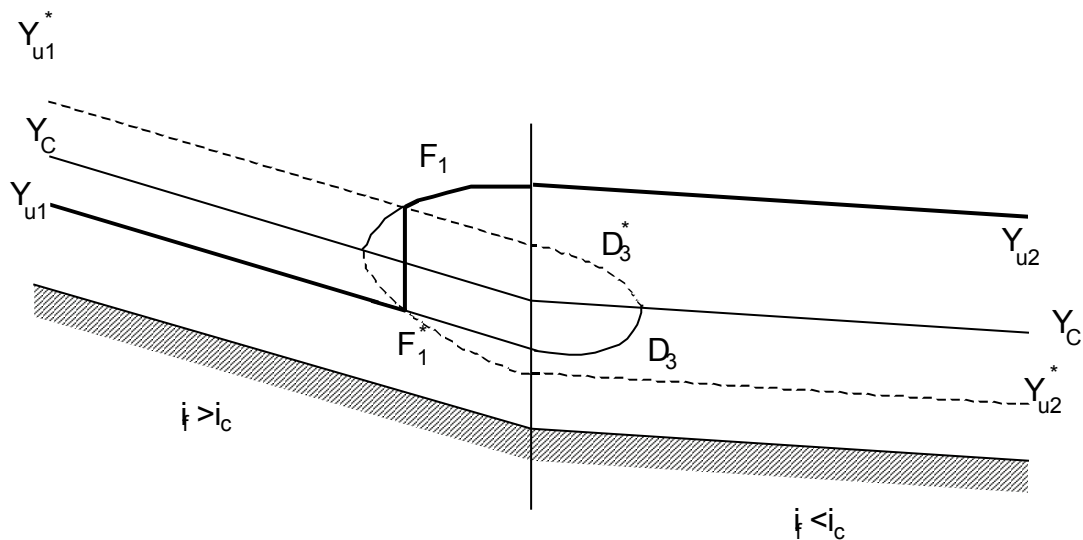


FIGURA 64

Nel secondo caso, ovvero quando la spinta di valle è superiore a quella di monte, si ha che $Y_{u1}^* < Y_{u2}$, quindi l'intersezione tra un profilo ed il coniugato dell'altro avviene solo a monte della variazione di pendenza (Figura 64). In questo caso il moto è uniforme in tutto il tratto a debole pendenza, poi prosegue verso monte con un profilo F_1 , fino al punto in cui la coniugata della profondità è pari alla profondità di moto uniforme: in quel punto avviene il risalto.

6.10. Soglia di fondo

Si tratta di un rialzamento localizzato sul fondo di un'altezza a . In genere, i bordi sono sagomati in modo da minimizzare le perdite di carico. Considereremo, per semplicità, il caso di alveo rettangolare largo b .

Supponiamo che non vi siano altre perturbazioni in prossimità della traversa, in modo che, a monte ed a valle $Y = Y_u$, ed il carico specifico

$$E = E_u = Y_u + \frac{U_u^2}{2g} \quad (222)$$

In corrispondenza di tale sovrالعlevatione, il carico specifico, che è misurato rispetto alla quota del fondo, diminuisce di una quantità a . D'altra parte, il grafico di Figura 46 mostra che, affinché possa fluire nell'alveo la portata assegnata Q , il carico specifico deve essere superiore al carico critico

$$E_c = \frac{3}{2} Y_c = \sqrt[3]{\frac{Q^2}{b^2 g}} \quad (223)$$

Distinguiamo quindi il caso nel quale $(E_u - a) > E_c$ nel quale, come vedremo, il moto avviene senza transizione attraverso lo stato critico, dal caso in cui $(E_u - a) < E_c$ in cui il moto avviene con transizione.

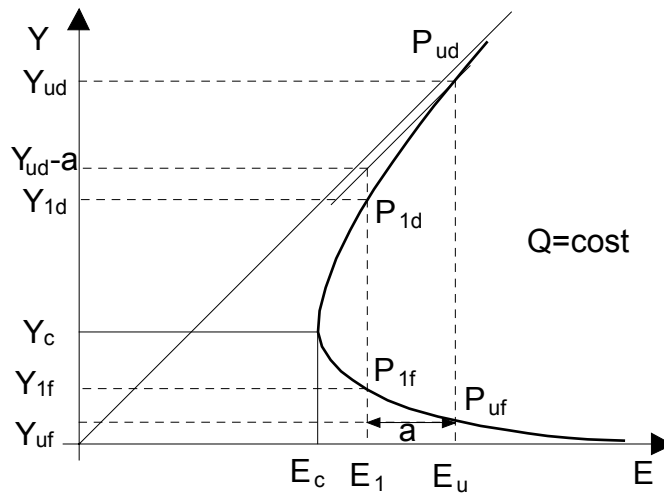


FIGURA 65

6.10.1. Attraversamento senza transizione

A partire dalle condizioni di moto uniforme, nell'affrontare la soglia, la corrente avrà una variazione di livello corrispondente alla diminuzione del carico specifico dal valore E_u al valore $E_1 = E_u - a$. Se l'alveo è a debole pendenza, la corrente si sposta dal punto P_{ud} al punto P_{1d} del grafico di Figura 65, questo corrisponde ad un abbassamento del livello ΔY , che risulta maggiore dell'innalzamento della soglia a : il pelo libero si abbassa in corrispondenza della soglia. Al contrario, nel caso di alveo a forte pendenza lo stato della corrente passa dal punto P_{uf} al punto P_{1f} , con un corrispondente aumento della profondità della corrente in corrispondenza della soglia (Figura 66).

6.10.2. Attraversamento con transizione in alveo a debole pendenza

In questo caso l'energia specifica della corrente indisturbata non è sufficiente affinché la corrente superi l'ostacolo. È necessario quindi che la corrente rallenti rispetto al moto uniforme in modo da diminuire le perdite di carico lungo il percorso ed aumentare il carico specifico in modo da raggiungere, sulla soglia, il minimo valore necessario per il superamento dell'ostacolo: E_c . La corrente a monte della sezione 1 di Figura 67 ha un profilo di tipo D_1 che si determina imponendo che, in tale sezione, il carico specifico sia pari a quello minimo a superare la soglia con la portata assegnata $E_1 = E_c + a$. Nota E_1 , si ricava infatti la profondità Y_1 a partire dalla quale si disegna il profilo D_1 : nel grafico di Figura 68 si passa da P_0 , che corrisponde al moto uniforme, a P_1 . A valle di tale sezione il carico diminuisce, determinando un abbassamento del pelo libero fino a raggiungere le condizioni critiche nella sezione 2 (punto P_2).

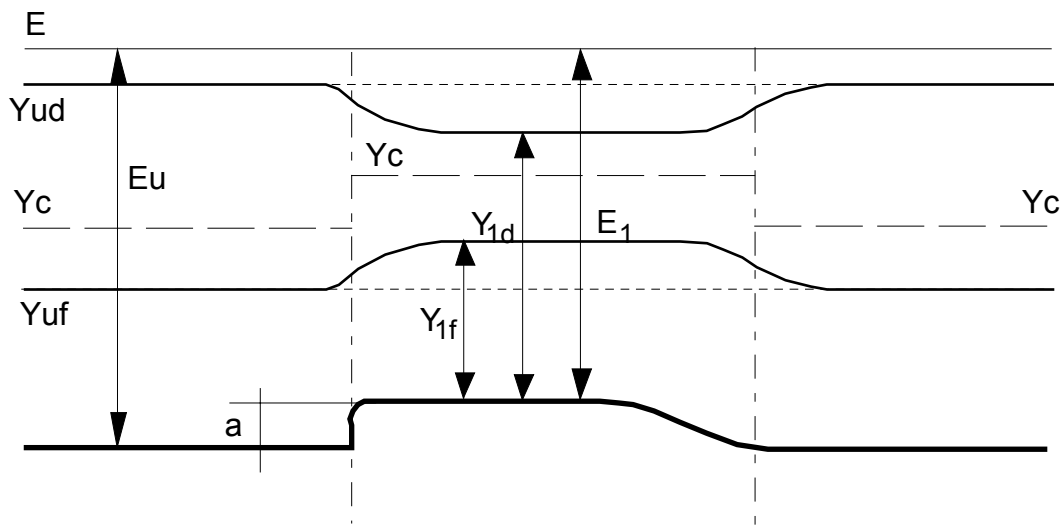


FIGURA 66

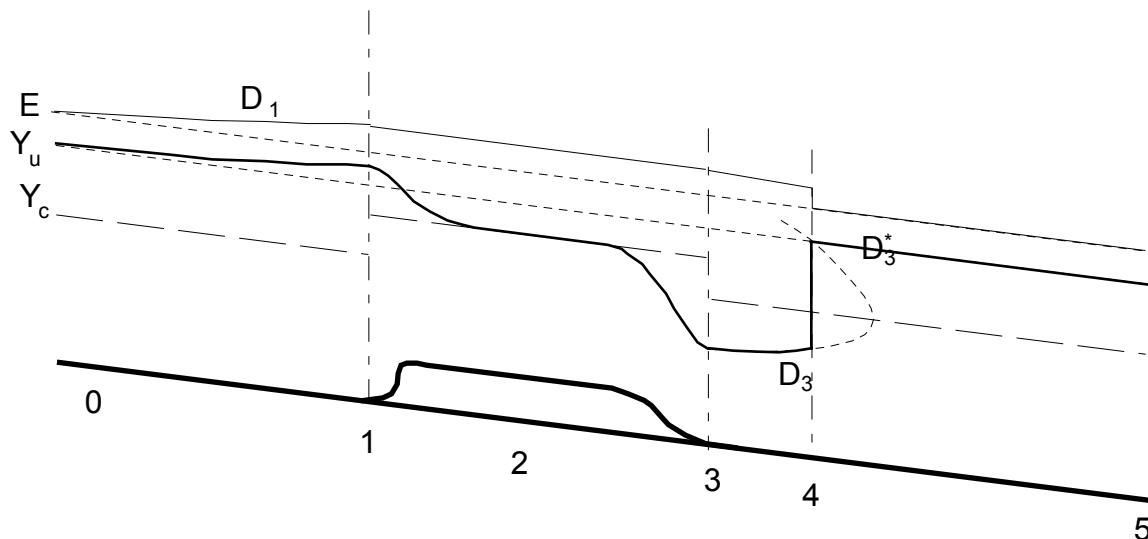


FIGURA 67

Da questo punto la corrente diventa veloce e, quando il carico specifico riaumenta alla fine della soglia, lo stato della corrente prosegue verso il punto P_3 che ha pari carico specifico rispetto a P_1 ma si trova sul ramo della curva corrispondente a corrente veloce. In conseguenza di questa variazione il pelo libero si abbassa ulteriormente fino alla profondità Y_3 . Immediatamente a valle di questa sezione ci si trova in condizioni di corrente veloce in un alveo a debole pendenza, quindi la corrente ha un profilo di tipo D_3 che risulta determinato dalla quota di monte Y_3 . Questo profilo continua

fino al punto in cui l'altezza coniugata della corrente non coincide con quelle di moto uniforme. Lungo questo tratto, la corrente ha profondità inferiore a quella corrispondente al moto uniforme, quindi la sua velocità è maggiore così come le perdite di carico. In condizioni di moto uniforme le perdite di carico sarebbero pari ad i_f , ed il carico specifico rimarrebbe costante, in questo caso le perdite di carico sono maggiori quindi il carico specifico diminuisce lungo il percorso fino a raggiungere il punto P_4 . In tale sezione avviene un risalto idraulico che porta la corrente a diventare lenta, raggiungendo nuovamente le condizioni di moto uniforme (punto P_5).

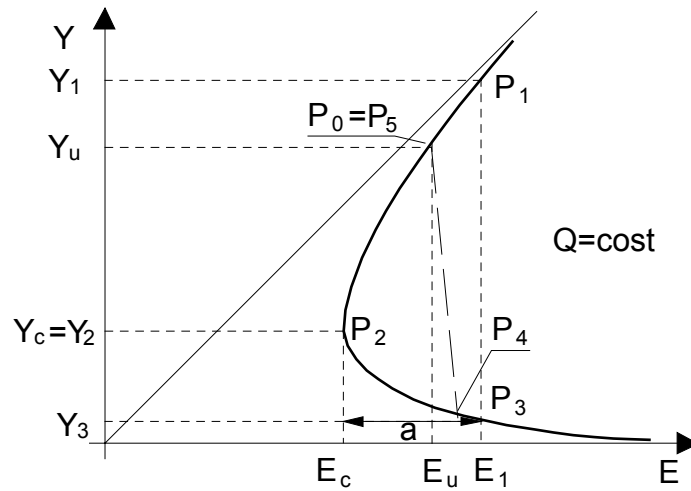


FIGURA 68

6.10.3. Attraversamento con transizione in alveo a forte pendenza

Se l'alveo è a forte pendenza la corrente uniforme a monte è veloce e quindi non può essere influenzata da ciò che accade più a valle: il recupero di carico specifico necessario a superare la soglia può avvenire solo dopo una transizione a corrente lenta attraverso un risalto.

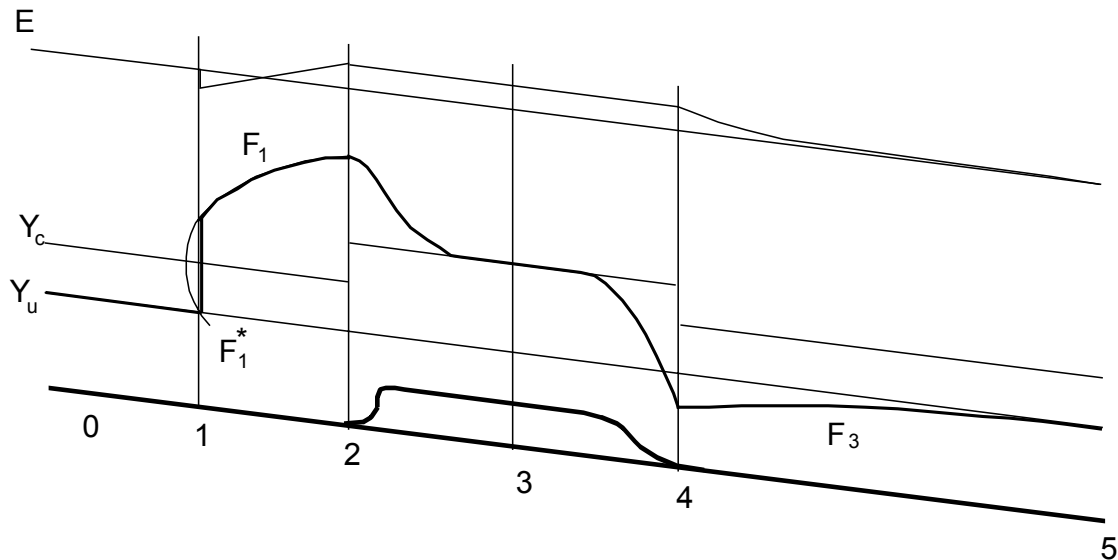
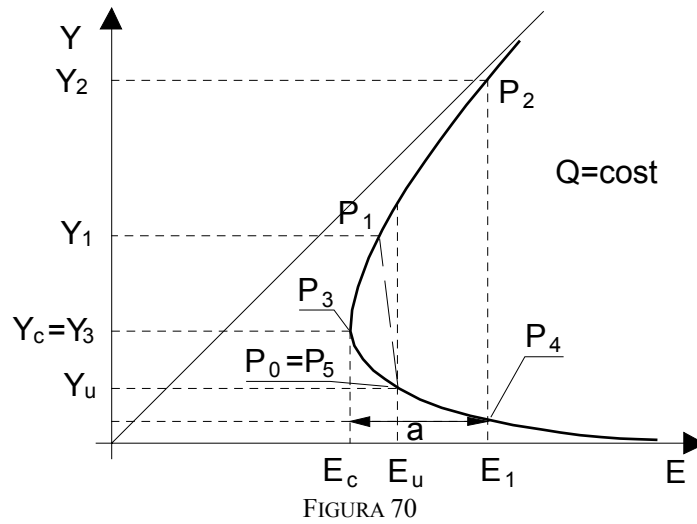


FIGURA 69

La corrente rimane in condizioni di moto uniforme (punto P_0) fino a quando non avviene la transizione a corrente lenta attraverso un risalto idraulico. A valle del risalto si ha un profilo di tipo F_1 , che porta la corrente fino allo stato P_2 . In questo tratto la profondità è maggiore di quella del moto uniforme, e perciò il carico specifico aumenta nella direzione del moto, recuperando sia l'energia dissipata nel risalto sia quella parte che mancava a raggiungere il carico minimo

necessario a superare la soglia, $E_2 = E_c + a$. In corrispondenza della soglia il pelo libero si abbassa fino a raggiungere, nella sezione 3 le condizioni critiche, P_3 . Nel tratto successivo la soglia diminuisce di spessore, determinando un aumento del carico specifico fino ad un valore $E_4 = E_2$. Corrispondentemente lo stato della corrente si sposta lungo il ramo del grafico di Figura 70 che corrisponde a corrente veloce fino a raggiungere il punto P_4 al di sotto della profondità di moto uniforme. Infine la corrente prosegue verso valle con un profilo di tipo F_3 e tende a raggiungere, asintoticamente, le condizioni di moto uniforme (punto P_5).



Per il calcolo effettivo del profilo si procede secondo il seguente schema: note la portata e le caratteristiche dell'alveo si individua l'altezza critica e quindi il carico critico E_c che si ha nella sezione 3. Nella sezione 2, immediatamente a monte della soglia il carico specifico diventa $E_3 = E_c + a$, seguendo il ramo di corrente lenta del grafico di Figura 70 si individua l'altezza Y_2 che costituisce il punto di partenza per tracciare il profilo F_1 che prosegue verso monte. Il profilo si interrompe quando la profondità coniugata è pari all'altezza di moto uniforme (sezione 1) ed ivi si localizza il risalto. A monte di questa sezione si hanno condizioni di moto uniforme. Sempre a partire dalla sezione critica, 3, si costruisce il profilo a valle della soglia, determinando innanzitutto la quota Y_4 nella sezione 4, corrispondente ad un aumento di carico specifico da E_c ad $E_c + a$, e tracciando a partire da questo un profilo di tipo F_3 .

INDICE

INTRODUZIONE	5
<hr/>	
1. CINEMATICA DEI FLUIDI	8
<hr/>	
1.1. TENSORE GRADIENTE DI VELOCITÀ	8
1.1.1. ROTAZIONE RIGIDA	9
1.1.2. VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE	10
1.2. DESCRIZIONE LAGRANGIANA ED EULERIANA DI UN CAMPO	13
1.2.1. DESCRIZIONE EULERIANA	14
1.2.2. DESCRIZIONE LAGRANGIANA	14
1.3. CLASSIFICAZIONE DEI MOTI	17
2. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI	18
<hr/>	
2.1. I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI	18
2.1.1. PRINCIPIO DI CONSERVAZIONE DELLA MASSA:	18
2.1.2. PRINCIPIO DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO (EULERO, 1752)	20
2.1.3. TENSORE DELLE TENSIONI	22
2.1.4. EQUAZIONE DI CAUCHY	24
2.1.5. PRINCIPIO DI BILANCIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO (EULERO, 1775):	24
2.2. EQUAZIONI COSTITUTIVE	25
2.3. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES	27
2.3.1. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES IN FORMA ADIMENSIONALE	27
2.3.2. FLUSSI PARALLELI	29
2.4. EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA	31
3. IDROSTATICA	33
<hr/>	
3.1. DISTRIBUZIONE DELLE PRESSIONI ALL'INTERNO DI UN LIQUIDO PESANTE IN QUIETE	33
3.2. SPINTE SU SUPERFICIE IN CONDIZIONI IDROSTATICHE	35
3.2.1. SPINTE SU SUPERFICIE PIANE	36
3.2.2. SPINTE SU SUPERFICIE CURVE	39
3.3. ALCUNE APPLICAZIONI DELL'IDROSTATICA	41
3.3.1. MANOMETRI A LIQUIDO	41
3.3.2. SPESSORE DI UNA CONDOTTA CIRCOLARE	42
4. EQUAZIONI DELLE CORRENTI	44
<hr/>	
4.1. FLUSSI QUASI-UNIDIMENSIONALI	44

4.2. CONSERVAZIONE DELLA MASSA	45
4.3. EQUAZIONE DELL'ENERGIA PER LE CORRENTI	47
4.4. DISSIPAZIONE VISCOSA	51
4.4.1. SCABREZZA EQUIVALENTE	52
4.4.2. EVOLUZIONE DELLO STRATO LIMITE	52
5. CORRENTI IN PRESSIONE	55
5.1. MOTO UNIFORME E PERMANENTE	55
5.1.1. GENERALITÀ	55
5.1.2. EQUAZIONE DI DARCY-WEISBACH	55
5.1.3. RESISTENZA NELLE CONDOTTE	56
5.1.4. FORMULE PRATICHE	58
5.1.4.1. Formula di Darcy	58
5.1.4.2. Formula di Chézy	59
5.2. MOTO PERMANENTE	60
5.2.1. GENERALITÀ	60
5.2.2. VARIAZIONI GRADUALI DI SEZIONE	60
5.2.3. BRUSCO ALLARGAMENTO	60
5.2.4. BRUSCO RESTRINGIMENTO	64
5.2.5. ALTRE PERDITE DI CARICO CONCENTRATE	65
5.2.6. VENTURIMETRO	66
5.2.7. SBOCCO IN UN SERBATOIO	68
5.2.8. IMBOCCO DI CONDOTTE	68
5.2.9. EFFLUSSO LIBERO	70
6. CORRENTI A PELO LIBERO	73
6.1. GENERALITÀ	73
6.2. CARICO SPECIFICO	73
6.3. CELERITÀ	76
6.4. MOTO UNIFORME	78
6.5. PROFILI DI RIGURGITO	81
6.6. FENOMENI DI EFFLUSSO LIBERO	81
6.6.1. LUCE IN PARETE VERTICALE	81
6.6.2. PARATOIA A BATTENTE	81
6.6.3. STRAMAZZO IN PARETE SOTTILE	82
6.6.4. STRAMAZZO IN PARETE GROSSA	83
6.7. TRANSIZIONE ATTRAVERSO LO STATO CRITICO	87
6.8. RISALTO IDRAULICO	88
6.9. VARIAZIONE DI PENDENZA	90
6.10. SOGLIA DI FONDO	92
6.10.1. ATTRAVERSAMENTO SENZA TRANSIZIONE	92
6.10.2. ATTRAVERSAMENTO CON TRANSIZIONE IN ALVEO A DEBOLE PENDENZA	93
6.10.3. ATTRAVERSAMENTO CON TRANSIZIONE IN ALVEO A FORTE PENDENZA	94
INDICE	96