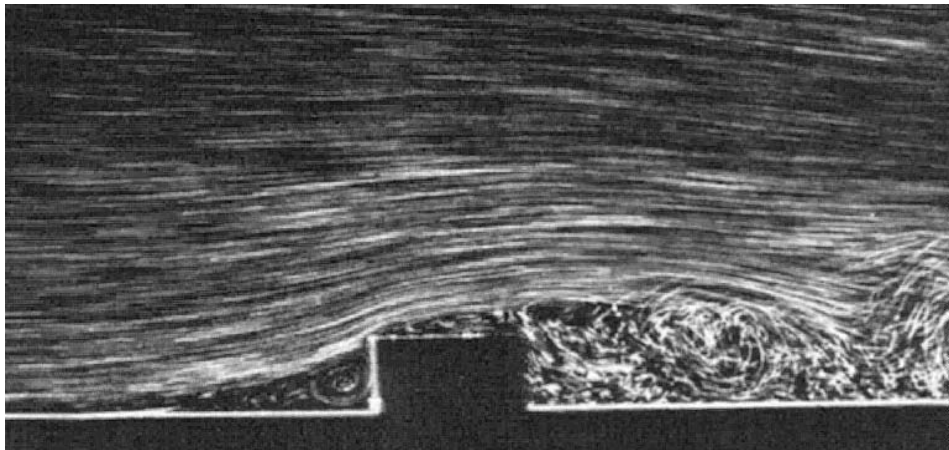


Giorgio Querzoli

Dispense di Meccanica dei Fluidi

(2006)



Università degli Studi di Cagliari
Facoltà di Ingegneria
Dipartimento di Ingegneria del Territorio

“... Infine c'è un problema fisico comune a molti campi, molto antico e non ancora risolto. Non è il problema di trovare nuove particelle fondamentali, ma qualcosa di lasciato in sospeso molto tempo fa, più di cento anni. Nessuno è mai riuscito ad analizzarlo matematicamente in modo soddisfacente, nonostante la sua importanza nelle scienze affini alla fisica: è l'analisi dei flussi vorticosi o flussi turbolenti. Osservando l'evoluzione di una stella si arriva un punto in cui si capisce che sta per iniziare la convezione, e poi non si riesce a prevedere più niente. Qualche milione di anni più tardi la stella esplose, ma non si riesce a darne una ragione. Non riusciamo ad analizzare i fenomeni meteorologici. Non conosciamo i meccanismi dei moti che avvengono all'interno della Terra. La forma più semplice del problema è: si prende un tubo lungo e si pompa dentro di esso ad alta velocità. Ci chiediamo: per spingere una data quantità d'acqua lungo il tubo quanta pressione ci vuole? È impossibile stabilirlo a partire dai principi elementari e dalle proprietà dell'acqua. Se l'acqua scorre lentamente oppure se si usa un liquido viscoso come il miele, allora si riesce a fare benino, lo troverete su qualsiasi libro di testo. Quello che proprio non si riesce a fare è analizzare l'acqua vera, quella bagnata, che scorre in un tubo. Ecco il problema centrale che un giorno o l'altro dovremo riuscire a risolvere. ...”

Richard P. Feynman (Nobel per la fisica nel 1965)

da: *Sei pezzi facili*, Ed. Adelphi, 2000

1. RICHIAMI DI ANALISI TENSORIALE

1.1. Introduzione

I fenomeni fisici sono rappresentabili in uno spazio vettoriale tridimensionale nel quale si suppone valida la geometria euclidea. Le quantità fisiche che caratterizzano i fenomeni sono dunque funzione delle coordinate di un generico punto (x_1, x_2, x_3) e del tempo, t .

In questo spazio le grandezze fisiche sono rappresentate attraverso entità matematiche diverse a seconda delle proprietà geometriche attraverso le quali sono definite:

- gli *scalari* sono associati ad un punto dello spazio e si definiscono attraverso un numero reale;
- i *vettori* sono associati ad un punto e ad una direzione orientata, e si definiscono attraverso 3 numeri reali, le componenti del vettore, organizzati in una matrice 3×1 ;

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};$$

- i *tensori* sono associati ad un punto dello spazio e a 2 direzioni orientate, e sono definiti per mezzo di 9 numeri reali, le componenti del tensore, organizzati in una matrice 3×3 :

$$\underline{\underline{\mathbf{a}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

In modo più generale si può dire che la descrizione dei fenomeni è effettuata attraverso tensori di differente ordine, d , che, nello spazio a tre dimensioni, sono definiti mediante 3^d numeri reali (le componenti). Pertanto uno scalare può essere considerato un tensore di ordine zero; un vettore, un tensore di ordine 1, mentre i tensori di ordine 2 sono spesso chiamati semplicemente tensori.

Per poter utilizzare queste entità è necessario definire le operazioni che possono essere effettuate e le leggi secondo le quali si trasformano le loro componenti in un cambiamento di sistema di riferimento.

1.2. Operazioni tra tensori

Richiamiamo brevemente le principali operazioni che possono essere effettuate con i tensori.

1.2.1. Somma

La somma può essere effettuata solo tra tensori dello stesso ordine e fornisce ancora un tensore dello stesso ordine degli addendi e che ha per componenti la somma delle componenti omologhe degli addendi:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \Rightarrow c_i = a_i + b_i \quad (\text{vettori})$$

oppure

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} + \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (\text{tensori})$$

1.2.2. Moltiplicazione per uno scalare

Moltiplicare un tensore per uno scalare corrisponde a moltiplicare ciascuna componente del tensore per lo scalare:

$$\mathbf{c} = a \mathbf{b} \Rightarrow c_i = a b_i \quad (\text{vettori})$$

oppure

$$\underline{\underline{c}} = a \underline{\underline{b}} \Rightarrow c_{ij} = a b_{ij} \quad (\text{tensori})$$

1.2.3. Prodotto

Il prodotto tra tensori si effettua effettuando il consueto prodotto righe per colonne tra le matrici delle componenti. Se indichiamo con A , B e C , rispettivamente, le matrici delle componenti del tensore $\underline{\underline{a}}$, $\underline{\underline{b}}$ e $\underline{\underline{c}}$, si ha:

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} \underline{\underline{b}} \Rightarrow C = A B \Rightarrow c_{ij} = \sum_{k=1,3} a_{ik} b_{kj}$$

o, seguendo la notazione di Einstein:

$$c_{ij} = a_{ik} b_{kj}$$

secondo la quale si sottintende la sommatoria sugli indici ripetuti allo stesso membro di una equazione, se tale indice non compare anche nell'altro membro dell'equazione.

Secondo le stesse regole si moltiplica un vettore per un tensore:

$$\mathbf{c} = \underline{\underline{a}} \mathbf{b} \Rightarrow c_i = \sum_{j=1,3} a_{ij} b_j = a_{ij} b_j.$$

1.2.4. Prodotto scalare

Il prodotto scalare tra due tensori è dato dalla somma dei prodotti delle componenti omologhe:

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow c = \sum_{i=1,3} a_i b_i = a_i b_i \quad (\text{vettori})$$

$$\underline{\underline{c}} = \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} \Rightarrow c = \sum_{i=1,3} \sum_{j=1,3} a_{ij} b_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad (\text{tensori})$$

1.2.5. Prodotto esterno

Permette di ottenere un tensore a partire da due vettori:

$$\underline{c} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \Rightarrow c_{ij} = a_i b_j$$

1.3. Operatori di Kronecker e di Ricci

Il delta di Kronecker, δ_{ij} , che si può riconoscere essere un tensore del secondo ordine, è definito in modo che, in qualsiasi sistema di riferimento, risulti:

$$\delta_{ij} = 1 \text{ se } i = j; \quad (1)$$

$$\delta_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j.$$

La matrice delle sue componenti non è altro che la matrice identità:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pertanto, se si moltiplica δ_{ij} per un tensore caratterizzato dall'aver uno dei pedici coincidente con uno dei pedici del delta di Kronecker, si produce una variazione del pedice del tensore stesso:

$$a_{ik} \delta_{ij} = a_{jk} \quad (2)$$

L'operatore di Ricci, ε_{ijk} , è definito in modo che, in qualsiasi sistema di riferimento, risulti:

$\varepsilon_{ijk}=1$	$\varepsilon_{ijk}=-1$	$\varepsilon_{ijk}=0$
se $i=1 ; j=2 ; k=3$	se $i=2 ; j=1 ; k=3$	
se $i=2 ; j=3 ; k=1$	se $i=1 ; j=3 ; k=2$	se uno dei pedici è ripetuto
se $i=3 ; j=1 ; k=2$	se $i=3 ; j=2 ; k=1$	

(3)

1.4. Sistemi di riferimento ortonormali

In uno spazio tridimensionale tutti i vettori possono essere espressi come combinazione lineare di una terna di vettori, linearmente indipendenti tra loro, che costituiscono una base. Quindi, se \mathbf{c}_1 , \mathbf{c}_2 e \mathbf{c}_3 sono tali che il determinante:

$$\det(\mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \mathbf{C}_3) \neq 0$$

(avendo indicato con \mathbf{C}_i la matrice colonna delle coordinate del vettore \mathbf{c}_i), allora, per ogni vettore, \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{c}_i \quad (4)$$

ed i coefficienti v_i costituiscono le componenti del vettore \mathbf{v} nel sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$.

Se i vettori della base sono ortogonali tra loro:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j &= 0 \text{ per } i \neq j \\ \mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j &\neq 0 \text{ per } i = j \end{aligned} \quad (5)$$

il sistema si dice ortogonale. Se inoltre i vettori della base hanno modulo unitario (sono quindi dei *versori*):

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij} \quad (6)$$

allora la base viene detta *ortonormale*, ed il sistema di riferimento *cartesiano*. Nei capitoli successivi, tranne diversa indicazione, utilizzeremo sistemi di riferimento cartesiani.

1.5. Cambiamento di sistema di riferimento

Consideriamo due sistemi di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$ e $\{\mathbf{d}_i\}$ e cerchiamo la trasformazione che lega le componenti di un generico vettore, \mathbf{v} , nella base di partenza $\{\mathbf{c}_i\}$ a quelle nella nuova base $\{\mathbf{d}_i\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_i \mathbf{c}_i \\ \mathbf{v} &= v'_i \mathbf{d}_i. \end{aligned} \quad (7)$$

Stiamo cercando dunque la trasformazione:

$$v'_i = T_{ij} v_j \quad (8)$$

ovvero:

$$v_i = R_{ij} v'_j \quad (9)$$

essendo R la trasformazione inversa di T .

Per individuare la forma che assume T è sufficiente applicare la trasformazione ad un vettore della base \mathbf{c}_i . Innanzitutto notiamo che la matrice delle sue componenti nel sistema di riferimento di cui fa parte sono tutte nulle, tranne la i -esima che è unitaria. Quindi, se indichiamo con c_{ij} la j -esima componente dell' i -esimo vettore della base, avremo che $c_{ij} = \delta_{ij}$. Se trasformiamo dunque le componenti dell' i -esimo vettore di base otteniamo:

$$c'_{ij} = T_{jk} \delta_{ik} = T_{ji}. \quad (10)$$

Quindi la matrice T ha per colonne le componenti dei vettori \mathbf{c}_i rispetto alla base $\{\mathbf{d}_i\}$. Con un ragionamento analogo è possibile concludere che la matrice di trasformazione inversa, R , ha come colonne le componenti dei vettori, \mathbf{d}_i , del nuovo sistema di riferimento, espresse rispetto al vecchio sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$.

Se ci limitiamo a cambiamenti tra sistemi di riferimento ortonormali è possibile dimostrare che le matrici di trasformazione devono essere *ortogonali*:

$$T^t = T^{-1} \quad (11)$$

cioè la matrice trasposta deve coincidere con la matrice della trasformazione inversa. Inoltre il determinante, $\det(T)$, deve essere unitario con il segno positivo per trasformazioni che passano da sistemi di riferimento destrorsi ad altri sistemi di riferimento destrorsi e da sistemi di riferimento sinistrorsi ad altri sistemi di riferimento sinistrorsi, mentre il segno negativo è proprio delle trasformazioni che passano da sistemi destrorsi a sistemi sinistrorsi e viceversa.

Per determinare come si trasformano le componenti di un tensore è sufficiente imporre che i suoi effetti sull'applicazione ad un vettore non dipendano dal sistema di riferimento:

$$\mathbf{v} = \underline{\underline{a}} \mathbf{b} \quad (12)$$

Se, come di consueto, indichiamo con lettere maiuscole le matrici delle componenti nel sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$, e con un apice quelle nel sistema $\{\mathbf{d}_i\}$, l'equazione precedente diventa:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A} \mathbf{B} \quad (13)$$

nel sistema di riferimento $\{\mathbf{c}_i\}$, e

$$\mathbf{V}' = \mathbf{A}' \mathbf{B}' \quad (14)$$

nel sistema di riferimento $\{\mathbf{d}_i\}$. Sostituendo l'equazione (9) nella (13):

$$\mathbf{R} \mathbf{V}' = \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{B}'$$

e moltiplicando a sinistra per \mathbf{R}^{-1} si ottiene:

$$\mathbf{V}' = (\mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}) \mathbf{B}', \quad (15)$$

poiché $\mathbf{R} \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{I}$. Confrontando, infine, la (15) con la (14) è facile verificare che il termine tra parentesi rappresenta proprio l'espressione cercata delle componenti di $\underline{\underline{a}}$:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{R}. \quad (16)$$

Se la trasformazione è ortogonale si ha $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^t$ e la relazione precedente diventa, scritta per componenti:

$$a'_{ij} = \mathbf{R}^{-1}_{ik} a_{km} \mathbf{R}_{mj} = \mathbf{R}_{ki} a_{km} \mathbf{R}_{mj}. \quad (17)$$

1.6. Proprietà di simmetria di un tensore

Ogni tensore può essere decomposto in tensori che godono di particolari proprietà di simmetria. Come vedremo nel seguito, alle proprietà di simmetria dei tensori corrispondono proprietà delle grandezze fisiche che essi rappresentano.

Innanzitutto consideriamo la decomposizione di un tensore nella sua parte simmetrica ed antisimmetrica. Se $\underline{\underline{a}}$ è un generico tensore di componenti a_{ij} , possiamo sempre scrivere:

$$a_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) + \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) \quad (18)$$

nella quale:

$\frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji}) = \text{sym}(\underline{\underline{a}})_{ij}$ è la *parte simmetrica* di $\underline{\underline{a}}$: $\text{sym}(\underline{\underline{a}})_{ij} = \text{sym}(\underline{\underline{a}})_{ji}$, mentre

$\frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji}) = \text{skew}(\underline{\underline{a}})_{ij}$ è la *parte antisimmetrica*: $\text{skew}(\underline{\underline{a}})_{ij} = -\text{skew}(\underline{\underline{a}})_{ji}$.

Analogamente è possibile scomporre un tensore in una parte sferica ed una deviatoria:

$$a_{ij} = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{a}}) \delta_{ij} + (a_{ij} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{a}}) \delta_{ij}) \quad (19)$$

avendo indicato con $\text{tr}(\underline{a}) = a_{ii}$ la traccia di \underline{a} . Il primo termine a secondo membro indica la *parte sferica* di \underline{a} , ed ha la proprietà che le sue componenti non variano al variare del sistema di riferimento, mentre il secondo termine, racchiuso tra parentesi, rappresenta la sua *parte deviatoria*.

1.7. Prodotto vettoriale

Sulla base delle precedenti definizioni è possibile introdurre altri due tipi di prodotto: il *prodotto tensoriale*:

$$\underline{\underline{c}} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = 2 \text{ skew}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) \quad (20)$$

ed il *prodotto vettoriale*:

$$d_i = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk} (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{jk}. \quad (21)$$

tra i due sussiste la relazione:

$$c_{ij} = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b})_{ij} = \varepsilon_{ijk} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_k \quad (22)$$

In pratica, poiché un tensore antisimmetrico ha solo 3 componenti indipendenti, è possibile rappresentarle in un vettore. Con riferimento ai simboli delle equazioni precedenti abbiamo quindi:

$$\underline{\underline{c}} = \begin{pmatrix} 0 & d_3 & -d_2 \\ -d_3 & 0 & d_1 \\ d_2 & -d_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Bisogna però osservare che, non essendo l'operatore di Ricci un tensore, il risultato di un prodotto vettoriale non è un vettore ma una *pseudo-vettore* in quanto non è invariante per tutti i cambiamenti di sistema di riferimento. In particolare, il prodotto vettoriale cambia verso passando da un sistema di riferimento destrorso ad uno sinistrorso e viceversa.

1.8. Autovalori ed autovettori

Dato un tensore del secondo ordine \underline{a} , si vuole trovare il vettore \mathbf{b} per cui risulti:

$$\underline{a} \mathbf{b} = \lambda \mathbf{b} \quad (24)$$

\mathbf{b} è detto *autovettore*, λ è detto *autovalore*. La relazione precedente può anche essere scritta per componenti:

$$a_{ij} b_j = \lambda b_i \quad (25)$$

Per determinare le componenti di \mathbf{b} , si deve risolvere un sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)b_1 + a_{12}b_2 + a_{13}b_3 = 0 \\ a_{21}b_1 + (a_{22} - \lambda)b_2 + a_{23}b_3 = 0 \\ a_{31}b_1 + a_{32}b_2 + (a_{33} - \lambda)b_3 = 0 \end{cases} \quad (26)$$

Il sistema ha una soluzione non banale se il determinante ad esso associato è uguale a zero:

$$\det(a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) = 0 \quad (27)$$

I valori di λ per cui è verificata la precedente relazione, si ottengono risolvendo la equazione caratteristica:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0 \quad (28)$$

essendo:

$$I_1 = \text{tr}(\underline{a}) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{ii} \quad (29)$$

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_3 = \det(\underline{a})$$

I_1 , I_2 e I_3 sono quantità scalari che non cambiano al variare del sistema di riferimento: gli *invarianti del tensore*. Gli autovalori λ che si ottengono dalla soluzione dell'equazione caratteristica, possono essere, in generale, numeri reali o complessi; nel caso di tensori simmetrici si può dimostrare che:

- gli autovalori sono reali;
- gli autovettori sono fra di loro ortogonali; poiché gli autovettori sono definiti a meno di una costante moltiplicativa, essi definiscono un sistema di riferimento cartesiano detto *sistema di riferimento principale* per quel tensore;
- nel sistema di riferimento principale, le uniche componenti differenti da zero, sono quelle della diagonale principale e coincidono con gli autovalori:

$$\underline{a} = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix} \quad (30)$$

1.9. Campi tensoriali

Si parlerà di campo tensoriale se in ogni punto di un dominio D è definito il tensore; quando cioè sono assegnate tutte le componenti del tensore in funzione della posizione $x \in D$.

Si definisce l'operatore vettoriale differenziale ∇ (leggi: nabla):

$$\nabla = \begin{pmatrix} \partial / \partial x_1 \\ \partial / \partial x_2 \\ \partial / \partial x_3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

∇ può operare:

- su un campo scalare φ , ottenendo il vettore gradiente:

$$\nabla \varphi = \begin{pmatrix} \partial \varphi / \partial x_1 \\ \partial \varphi / \partial x_2 \\ \partial \varphi / \partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{,1} \\ \varphi_{,2} \\ \varphi_{,3} \end{pmatrix}; \quad (32)$$

avendo utilizzato la notazione compatta per le derivate parziali, secondo la quale $\partial a / \partial x_i = a_{,i}$.

- su un vettore \mathbf{a} mediante prodotto scalare, ottenendo uno scalare che è la *divergenza* di \mathbf{a} :

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}) = \nabla \cdot \mathbf{a} = \partial a_i / \partial x_i = a_{i,i} \quad (33)$$

se un campo ha divergenza nulla, è detto *solenoidale*;

- un vettore \mathbf{a} mediante prodotto vettore, ottenendo il vettore *rotore* di \mathbf{a} :

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}) = \nabla \times \mathbf{a} \quad (34)$$

se un campo vettoriale ha rotore nullo, è detto *irrotazionale*;

- su un vettore \mathbf{a} mediante prodotto esterno, ottenendo un tensore del secondo ordine o gradiente del vettore:

$$\nabla \mathbf{a} = \nabla \otimes \mathbf{a} \quad (35)$$

o, per componenti:

$$(\nabla \mathbf{a})_{ij} = \partial a_j / \partial x_i = a_{j,i}$$

Il vettore gradiente ottenuto da una funzione potenziale è diretto lungo la normale, identificata dal versore \mathbf{n} , delle superfici equipotenziali; infatti, indicato con \mathbf{s} il versore che identifica una generica direzione, la componente di $\mathbf{a} = \nabla \varphi$ lungo \mathbf{s} è data da:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = \frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{dx_i}{ds} = a_i \frac{dx_i}{ds} = a_i \cos \alpha_{is} = a_i s_i \quad (36)$$

se \mathbf{s} è contenuta nel piano tangente, risulta:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} = 0 \quad (37)$$

quindi il vettore \mathbf{a} è diretto secondo la normale \mathbf{n} .

Dimostriamo che un campo potenziale è irrotazionale:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0 \quad (38)$$

infatti:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} \quad (39)$$

scambiando i pedici j e k si ha:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_k \partial x_j} = \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} \quad (40)$$

ottenendo due quantità uguali ma di segno opposto, quindi nulle. Seguendo a ritroso la dimostrazione, si dimostra anche che un campo irrotazionale è potenziale.

Per un campo irrotazionale e solenoidale il *laplaciano*, del potenziale:

$$\nabla \cdot \nabla \varphi = \nabla^2 \varphi \quad (41)$$

è uguale a zero.

1.10. Teoremi di Green e Stokes

Se F è una funzione definita in tutti i punti di un dominio limitato V racchiuso dalla superficie chiusa S , risulta (*teorema di Green*):

$$\iiint_V \frac{\partial F}{\partial x_i} dV = \iint_S F n_i dS \quad (42)$$

essendo, così come nel seguito, \mathbf{n} la normale esterna alla superficie.

Se sono definite in tutto il dominio le componenti di un vettore \mathbf{a} , applicando il teorema di Green per le tre componenti di \mathbf{a} si ottiene il *teorema della divergenza*:

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} dV = \iiint_V \frac{\partial a_i}{\partial x_i} dV = \iint_S a_i n_i dS = \iint_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS \quad (43)$$

l'integrale di superficie è il flusso di \mathbf{a} attraverso la superficie S . In definitiva, in una sua forma più generale, il teorema di Green può essere applicato considerando F un tensore di ordine arbitrario, le cui componenti risultano comunque definite in V .

Assegnata una linea chiusa L , con versore tangente \mathbf{s} , in un campo D in tutti i punti del quale risulti definito il vettore \mathbf{a} ed una superficie aperta S in D avente come contorno L , risulta (*teorema di Stokes*):

$$\oint_L \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} dl = \iint_S (\nabla \times \mathbf{a}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (44)$$

la circuitazione di \mathbf{a} (il primo membro della precedente espressione) è uguale al flusso del rotore di \mathbf{a} attraverso una qualsiasi superficie delimitata da L .

1.11. Coordinate curvilinee

Siano x_i le coordinate di un generico punto in una terna cartesiana ortogonale, individuata dai versori \mathbf{c}_i , ed y_j le coordinate del medesimo punto in una terna curvilinea ortogonale individuata dai versori \mathbf{b}_j . Si suppone che il determinante Jacobiano della trasformazione $J = \det(x_{i,j})$ non si annulli e che siano di classe C^n le funzioni che stabiliscono la corrispondenza biunivoca tra le due terne:

$$x_i = x_i(y_j) ; \quad y_j = y_j(x_i). \quad (45)$$

Le superfici ove $y_j = \text{cost.}$ sono dette superfici coordinate, l'intersezione di ciascuna coppia di superfici coordinate definisce una curva coordinata. Nel caso di sistemi ortogonali, che sono gli unici che in seguito considereremo, le intersezioni delle curve coordinate formano tra loro un angolo retto.

Il vettore $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j}$ è tangente alla curva coordinata e quindi :

$$\mathbf{b}_j = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} / \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} \right| \quad (46)$$

(si ricorda che, comparendo l'indice j anche a primo membro, in questo caso non si sottintende la sommatoria sull'indice j ripetuto, secondo la notazione di Einstein). Posto:

$$h_j = \left| \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} \right| \quad (47)$$

risulta:

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} = h_j \mathbf{b}_j \quad (48)$$

Le quantità h_j sono detti fattori di scala ed il verso di \mathbf{b}_j è quello in cui risulta crescente y_j .

Poiché anche il gradiente di y_j è ortogonale alle superfici in cui y_j è costante, risulta (nel caso di coordinate curvilinee ortogonali):

$$\mathbf{b}_j = \nabla y_j / |\nabla y_j| \quad (49)$$

L'arco di curva $d\mathbf{x}$ è dato da:

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y_j} dy_j = h_j \mathbf{b}_j dy_j \quad (50)$$

pertanto la lunghezza dell'arco si ottiene dalla relazione:

$$d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = h_j^2 dy_j^2 \quad (51)$$

L'elemento di volume dV (essendo $\mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = 1$) è dato da:

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = h_1 \mathbf{b}_1 dy_1 \cdot h_2 \mathbf{b}_2 dy_2 \times h_3 \mathbf{b}_3 dy_3 = h_1 h_2 h_3 dy_1 dy_2 dy_3 \quad (52)$$

Si vogliono ora valutare le componenti f_j del gradiente di uno scalare ψ nel sistema di coordinate curvilinee:

$$\nabla \psi = f_j \mathbf{b}_j \quad (53)$$

poiché:

$$d\psi = \nabla \psi \cdot d\mathbf{x} = f_i h_i dy_i \quad (54)$$

il differenziale di ψ è dato anche da:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} dy_i \quad (55)$$

eguagliando risulta:

$$f_j = \frac{1}{h_j} \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \quad (56)$$

quindi:

$$\nabla = \frac{\mathbf{b}_i}{h_i} \frac{\partial}{\partial y_i} \quad (57)$$

Applicando la relazione precedente prendendo come funzione potenziale y_i , si ha:

$$\nabla y_i = \frac{\mathbf{b}_i}{h_i} \quad (58)$$

Poiché:

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3 = h_2 h_3 \nabla y_2 \times \nabla y_3 \quad (59)$$

$$\nabla \cdot \nabla y_2 \times \nabla y_3 = 0 \quad (60)$$

la divergenza del vettore $a_1 \mathbf{b}_1$ risulta:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (a_1 \mathbf{b}_1) &= \nabla \cdot (a_1 h_2 h_3 \nabla y_2 \times \nabla y_3) = \\ &= [\nabla(a_1 h_2 h_3)] \cdot \left[\frac{\mathbf{b}_2}{h_2} \times \frac{\mathbf{b}_3}{h_3} \right] + (a_1 h_2 h_3) \nabla \cdot [\nabla y_2 \times \nabla y_3] = \\ &= [\nabla(a_1 h_2 h_3)] \cdot \frac{\mathbf{b}_1}{h_2 h_3} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \frac{\partial(a_1 h_2 h_3)}{\partial y_1} \end{aligned} \quad (61)$$

Quindi la divergenza di un vettore è data da:

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} (a_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial y_2} (a_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial y_3} (a_3 h_1 h_2) \right] \quad (62)$$

In modo analogo si dimostra che il rotore ed il laplaciano sono dati da:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{b}_1 & h_2 \mathbf{b}_2 & h_3 \mathbf{b}_3 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial y_2} & \frac{\partial}{\partial y_3} \\ h_1 a_1 & h_2 a_2 & h_3 a_3 \end{vmatrix} \quad (63)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial y_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right) + \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{h_2 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right) + \frac{\partial}{\partial y_3} \left(\frac{h_2 h_3}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial y_3} \right) \right] \quad (64)$$

1.11.1. Coordinate cilindriche

Siano ρ , ϕ e z le coordinate cilindriche (fig. 1); risulta:

$$x_1 = \rho \cos \phi ; \quad x_2 = \rho \sin \phi ; \quad x_3 = z \quad (65)$$

con:

$$\rho \geq 0; \quad 0 \leq \phi < 2\pi; \quad -\infty < z < +\infty \quad (66)$$

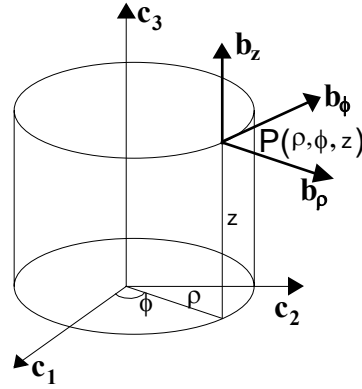


FIGURA 1

Pertanto:

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \rho}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \phi + \sin^2 \phi} = 1 \quad (67)$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \phi}\right)^2} = \sqrt{\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi} = \rho \quad (68)$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial z}\right)^2} = 1 \quad (69)$$

Quindi:

$$\nabla \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \mathbf{b}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \mathbf{b}_\phi + \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{b}_z \quad (70)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\rho) + \frac{\partial a_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z} (\rho a_z) \right] \quad (71)$$

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{\rho} \left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial z} (\rho a_\phi) \right) \mathbf{b}_\rho + \left(\rho \frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \rho \frac{\partial a_z}{\partial \rho} \right) \mathbf{b}_\phi + \left(\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho a_\phi) - \frac{\partial a_\rho}{\partial \phi} \right) \mathbf{b}_z \right] \quad (72)$$

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

1.11.2. Coordinate sferiche

Siano ρ, θ e ϕ le coordinate sferiche definite come riportato in Figura 2. Risulta:

$$x_1 = \rho \sin \theta \cos \phi; \quad x_2 = \rho \sin \theta \sin \phi; \quad x_3 = \rho \cos \theta \quad (73)$$

con: $\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi$. Pertanto:

$$h_\rho = 1; h_\theta = \rho \sin \theta; h_\phi = \rho \quad (74)$$

quindi:

$$\nabla\psi = \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \mathbf{b}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \mathbf{b}_\phi + \frac{1}{\rho \sin\theta} \frac{\partial\psi}{\partial\phi} \mathbf{b}_\theta \quad (75)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{a} = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} & \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial\theta} (\rho \sin\theta a_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi} (\rho a_\theta) \right] \mathbf{e}_\rho + \left[\frac{\partial a_\rho}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial\rho} (\rho \sin\theta a_\phi) \right] \rho \mathbf{e}_\theta + \right. \\ & \left. + \left[\frac{\partial}{\partial\rho} (\rho a_\theta) - \frac{\partial a_\rho}{\partial\theta} \right] \rho \sin\theta \mathbf{e}_\phi \right\} \end{aligned} \quad (76)$$

$$\nabla^2\psi = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho^2 \frac{\partial\psi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} \quad (77)$$

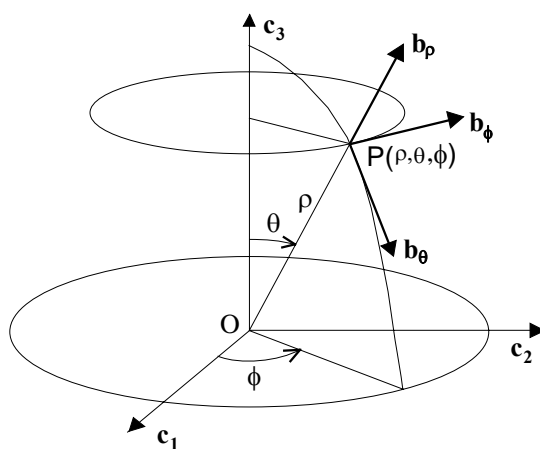


FIGURA 2

2. CINEMATICA DEI FLUIDI

2.1. Definizione di fluido

Per mettere in evidenza quali siano le caratteristiche peculiari dei fluidi immaginiamo di fare un esperimento: consideriamo una sferetta rigida ed un semipiano elastico (ovvero il modulo E di Young della sferetta è molto maggiore di quello del semipiano). Sia, poi, z l'asse verticale. Immaginiamo di lasciar cadere la sfera sotto l'azione della forza peso \mathbf{W} . Dopo un certo intervallo di tempo Δt finito, quando la sferetta sarà ferma, potremo valutare la deformazione ε_z da essa prodotta sul semipiano. Sappiamo che questa è direttamente proporzionale alla forza peso ed inversamente proporzionale al modulo di Young del semipiano; inoltre, dopo un certo tempo, essa rimane costante.

Supponiamo ora di avere a disposizione non un semipiano elastico, ma uno fluido. Se ripetiamo l'esperienza precedente osserveremo che ad un istante t_0 la sferetta risulterà tangente al semipiano, ad un istante successivo t_1 misureremo una certa deformazione ε_1 , ad un istante t_2 misureremo una deformazione $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ e così via. La sferetta continuerà a scendere indefinitamente: $\varepsilon_z \rightarrow \infty$ per $t \rightarrow \infty$. Si osserva invece che, dopo un tempo sufficientemente lungo, la velocità della sferetta, e quindi la velocità di deformazione del fluido, si mantiene costante. Da ciò si deduce come la deformazione non sia un buon parametro per caratterizzare il fluido, a differenza della velocità di deformazione.

Possiamo pertanto definire *fluido* quel mezzo continuo per cui, in conseguenza di una sollecitazione costante, ad un tempo infinito corrisponde una velocità di deformazione finita e quindi misurabile.

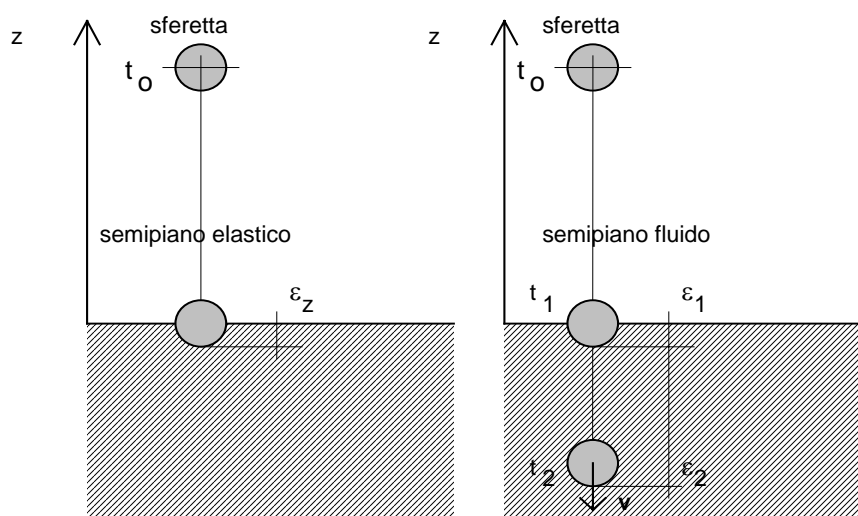


FIGURA 3

2.2. Mezzo continuo

La materia che, come è noto è costituita da particelle elementari, sarà trattata in seguito come un mezzo continuo; si supponrà cioè che la massa sia distribuita con continuità nello spazio. In effetti le caratteristiche del fluido, inteso come mezzo continuo saranno ottenute attraverso delle medie effettuate su di un volumetto, detto *particella fluida*. Questo volumetto, che corrisponde anche alla minima scala alla quale possiamo descrivere il comportamento di un fluido come mezzo continuo, deve essere sufficientemente piccolo rispetto alle scale dei fenomeni, affinché le grandezze medie su di esso possano essere approssimate con uno sviluppo di Taylor al primo ordine, ma grande abbastanza da contenere un numero di particelle elementari così elevato che le medie siano statisticamente significative. L'ipotesi del continuo porta dunque ad ignorare la struttura intima della materia a livello atomico e la descrizione del moto a tale livello. Per tenere conto di questi moti vengono introdotte invece variabili termodinamiche quali la temperatura che è legata all'energia media dei moti a livello atomico e subatomico.

Si consideri un punto P, individuato dalla sua posizione \mathbf{x} , all'interno del mezzo in esame, ed un volume ΔV che lo racchiude, indicato con ΔM la massa contenuta in ΔV , il limite:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V} \quad (78)$$

non è una funzione continua delle variabili spaziali e dipende dal modo con cui si fa tendere il volume a zero (possono essere considerate sfere, cubi con centro in P o altre figure geometriche), essendo funzione del numero di particelle elementari che sono presenti nel volume nell'istante considerato. In effetti esiste ed è unico solo il limite per $\Delta V \rightarrow \Delta V_p$, con ΔV_p volume della particella fluida. In questo caso infatti il numero di particelle elementari contenute nel volume è così grande da fare sì che la massa mediamente contenuta in esso sia indipendente dal comportamento delle singole particelle elementari e dal modo in cui il volume viene fatto tendere a ΔV_p . L'ipotesi del continuo permette di considerare coincidenti i due limiti, supponendo inoltre che siano una funzione continua di classe C^n . Tale funzione, la *densità*, verrà indicata con $\rho(\mathbf{x})$:

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_p} \frac{\Delta M}{\Delta V} \cong \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta V}. \quad (79)$$

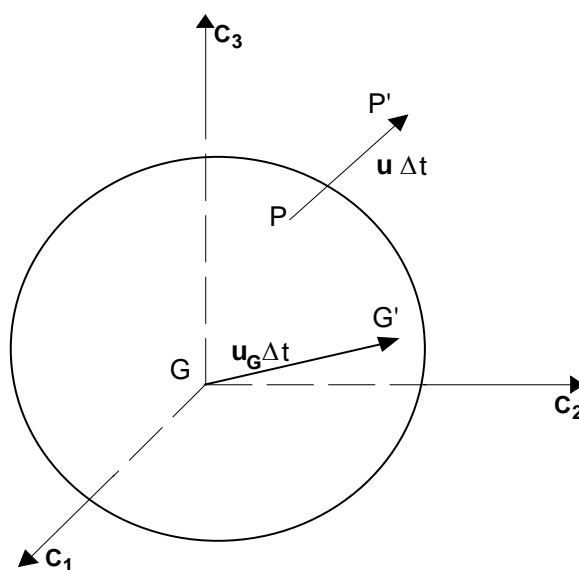


FIGURA 4

2.3. Tensore gradiente di velocità

Per la descrizione del comportamento cinematico nell'intorno di un punto consideriamo un volumetto infinitesimo, tale che la velocità al suo interno possa essere approssimata con uno sviluppo di Taylor al prim'ordine. Seguendo la consuetudine chiameremo tale volumetto particella fluida, anche se essa non è da confondersi con la definizione data in precedenza che, nella schematizzazione di mezzo continuo, coincide con un punto geometrico. Scegliamo una terna di assi di riferimento che, ad un certo istante, ha origine nel baricentro della particella stessa.

Il baricentro G , durante l'intervallo di tempo Δt , si sposta nel punto G' con velocità $(\mathbf{u})_G$:

$$GG' = (\mathbf{u})_G \Delta t \quad (80)$$

Un generico punto P della particella fluida, individuato dalla sua posizione \mathbf{x} , si sposta nello stesso intervallo di tempo in P' con velocità \mathbf{u} (Figura 4):

$$PP' = \mathbf{u} \Delta t \quad (81)$$

La velocità \mathbf{u} , generalmente diversa da $(\mathbf{u})_G$, si ottiene come sviluppo in serie nell'intorno dell'origine (che coincide con il baricentro della particella):

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u})_G + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_G x_i + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right)_G x_i x_j + \dots \quad (82)$$

Tenendo conto della definizione di particella, i termini di ordine superiore al primo vengono trascurati, pertanto:

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u})_G + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right)_G x_i = (\mathbf{u})_G + \nabla \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{x} \quad (83)$$

Lo spostamento di un generico punto di una particella fluida è dunque descritto dal tensore gradiente di velocità valutato nel baricentro (sarà in seguito omissa il pedice G):

$$\nabla \mathbf{u}^t = \begin{vmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \partial u_1 / \partial x_2 & \partial u_1 / \partial x_3 \\ \partial u_2 / \partial x_1 & \partial u_2 / \partial x_2 & \partial u_2 / \partial x_3 \\ \partial u_3 / \partial x_1 & \partial u_3 / \partial x_2 & \partial u_3 / \partial x_3 \end{vmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{r}}} + \underline{\underline{\mathbf{e}}} \quad (84)$$

Il tensore gradiente di velocità può essere decomposto nella somma di due tensori, uno antisimmetrico $\underline{\underline{\mathbf{r}}} = \text{skew}(\nabla \mathbf{u}^t)$ ed uno simmetrico $\underline{\underline{\mathbf{e}}} = \text{sym}(\nabla \mathbf{u}^t)$:

$$\begin{aligned} r_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (85)$$

Quindi la velocità del generico punto di una particella è data da:

$$\mathbf{u}_i = (\mathbf{u}_i)_G + r_{ij} x_j + e_{ij} x_j \quad (86)$$

Il moto può essere considerato, come sarà visto in seguito, come la somma di:

- una traslazione con la velocità del baricentro della particella;

- una rotazione rigida descritta dal tensore $\underline{\underline{r}}$;
- una velocità di deformazione descritta dal tensore $\underline{\underline{e}}$.

Sul primo addendo non ci sono ulteriori commenti da fare, mentre il significato del secondo e del terzo saranno discussi nel seguito.

2.3.1. Rotazione rigida

Si consideri un moto di rotazione rigida infinitesima attorno a G, il teorema di Eulero mostra che la rotazione rigida, oltre al punto G, mantiene fissi tutti i punti di una retta passante per G: l'asse di rotazione.

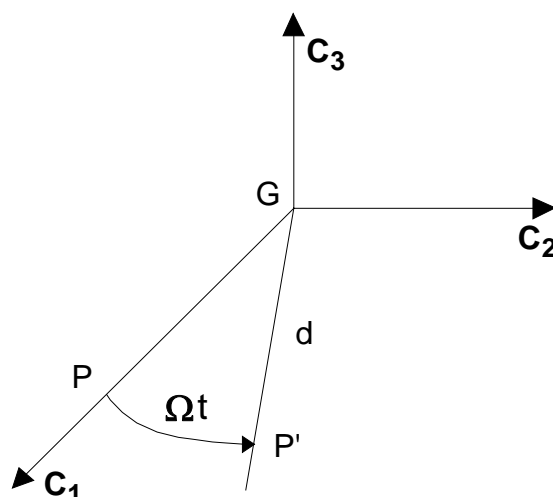


FIGURA 5

Senza perdere di generalità, si può assumere come asse 3 l'asse di una rotazione che avviene con velocità angolare Ω (Figura 5). Indicato con d la distanza dall'asse di rotazione di un generico punto P inizialmente posto sull'asse c_1 , le relazioni che descrivono il suo moto, sono:

$$x_1 = d \cos \Omega t; \quad x_2 = d \sin \Omega t; \quad x_3 = d \cos \Omega t; \quad (87)$$

quindi:

$$u_1 = -\Omega x_2; \quad u_2 = \Omega x_1; \quad u_3 = 0; \quad (88)$$

Il tensore simmetrico $\underline{\underline{e}}$ ha tutte le componenti nulle. Il tensore antisimmetrico, $\underline{\underline{r}}$, risulta:

$$\underline{\underline{r}} = \begin{vmatrix} 0 & -\Omega & 0 \\ \Omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (89)$$

È quindi stabilito che questa forma del tensore gradiente di velocità comporta una rotazione rigida; d'altra parte, si può dimostrare che un qualsiasi tensore antisimmetrico conserva tale proprietà nel cambiamento di un sistema di riferimento e può essere ricondotto nella forma precedentemente riportata: se ne deduce che il moto descritto da un tensore antisimmetrico è quello di una rotazione rigida.

Le proprietà di rotazione locale di un fluido sono descritte spesso attraverso la *vorticità* del campo, che è data da:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \text{rot}(\mathbf{u}) \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{vmatrix} \quad (90)$$

Essa è in stretta relazione con il tensore $\underline{\mathbf{r}}$, infatti:

$$\nabla \wedge \mathbf{u} = 2 \text{skew}(\nabla \mathbf{u}) = 2 \underline{\mathbf{r}}^\dagger = -2 \underline{\mathbf{r}} \quad (91)$$

e la corrispondenza biunivoca tra prodotto tensore e prodotto vettoriale (23) dà:

$$\underline{\mathbf{r}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (92)$$

Nell'esempio fatto in precedenza, di rotazione rigida intorno all'asse 3, solo la componente ω_3 sarebbe diversa da zero:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \mathbf{c}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ -\Omega x_2 & \Omega x_1 & 0 \end{vmatrix} = 2\Omega \mathbf{c}_3$$

2.3.2. Velocità di deformazione

Nel caso in cui il moto sia descritto dal solo tensore simmetrico, $\nabla \mathbf{u}^\dagger = \underline{\mathbf{e}}$, $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{0}}$, si ha:

$$\begin{aligned} u_1 &= e_{11}x_1 + e_{12}x_2 + e_{13}x_3 \\ u_2 &= e_{21}x_1 + e_{22}x_2 + e_{23}x_3 \\ u_3 &= e_{31}x_1 + e_{32}x_2 + e_{33}x_3 \end{aligned} \quad (93)$$

il moto risulta irrotazionale. Essendo $\underline{\mathbf{e}}$ simmetrica, esiste un sistema di riferimento, detto principale, in cui risultano non nulle solo le componenti della diagonale principale. Indicate con il soprassegno $\hat{\mathbf{e}}$ le grandezze relative a tale terna possiamo scrivere:

$$\frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_2} = \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial \hat{x}_3} = 0 \quad (94)$$

quindi la \hat{u}_1 risulta solo funzione della \hat{x}_1 e, più in generale, \hat{u}_i è funzione solo di \hat{x}_i .

Se il sistema di riferimento principale trasla con la velocità del baricentro della particella risulta:

$$\hat{u}_i = f(\hat{x}_i) = \hat{e}_{ii} \hat{x}_i. \quad (95)$$

Pertanto i punti che si trovano sugli assi coordinati si muovono rimanendo sugli assi. In un sistema di riferimento non principale, i punti che inizialmente si trovano lungo gli assi coordinati si muovono non mantenendosi sugli assi stessi. Con riferimento alla Figura 6, risulta che la velocità di un punto P che si trova all'istante iniziale sull'asse \mathbf{c}_1 è data da:

$$u_1(\mathbf{P}) = e_{11} x_1; \quad u_2(\mathbf{P}) = e_{21} x_1; \quad u_3(\mathbf{P}) = e_{31} x_1 \quad (96)$$

analogamente per il punto Q che si trova sull'asse c_2 :

$$u_1(Q) = e_{12} x_2; \quad u_2(Q) = e_{22} x_2; \quad u_3(Q) = e_{32} x_2 \quad (97)$$

Se facciamo riferimento agli spostamenti che avvengono in un intervallo di tempo Δt , avremo:

$$(\Delta x_1)_P = e_{11} x_1 \Delta t; \quad (\Delta x_2)_Q = e_{22} x_2 \Delta t;$$

pertanto i termini della diagonale principale:

$$e_{11} = \left(\frac{\Delta x_1}{x_1} \right)_P \frac{1}{\Delta t}; \quad e_{22} = \left(\frac{\Delta x_2}{x_2} \right)_Q \frac{1}{\Delta t} \quad (98)$$

risultano essere le velocità di allungamento relativo lungo gli assi coordinati.

Per i termini che non si trovano sulla diagonale principale si ha:

$$e_{21} = \left(\frac{\Delta x_2}{x_1} \right)_P \frac{1}{\Delta t} = \frac{\text{tg} \Delta \theta_{21}}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \theta_{21}}{\Delta t}; \quad e_{12} = \left(\frac{\Delta x_1}{x_2} \right)_Q \frac{1}{\Delta t} = \frac{\text{tg} \Delta \theta_{12}}{\Delta t} \cong \frac{\Delta \theta_{12}}{\Delta t} \quad (99)$$

avendo confuso la tangente con l'angolo. L'angolo, α , formato da due segmenti materiali che, all'istante iniziale, coincidono con c_1 e c_2 , è inizialmente retto. Dopo un tempo Δt , i due segmenti formeranno un angolo $\alpha' = \pi/2 - \Delta \theta_{12} - \Delta \theta_{21} = \pi/2 - 2 e_{12} \Delta t$, poiché $e_{21} = e_{12}$ e quindi $\Delta \theta_{21} = \Delta \theta_{12}$. La velocità di variazione dell'angolo tra i due segmenti è dunque:

$$\frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \frac{(\alpha' - \alpha)}{\Delta t} = -2e_{12}. \quad (100)$$

Più in generale si può concludere che le componenti del tensore e_{ij} , con $i \neq j$, rappresentano $1/2$ della variazione nell'unità di tempo dell'angolo, inizialmente retto, formato dai punti che si trovano lungo gli assi c_i e c_j .

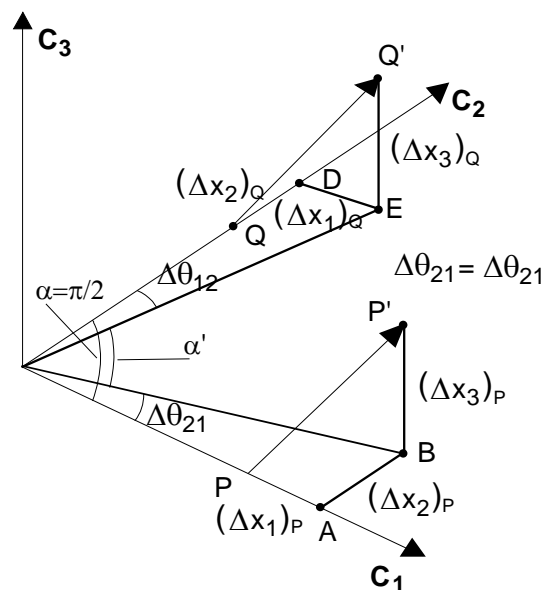


FIGURA 6

Si consideri infine una particella fluida di forma parallelepipedica con i lati paralleli agli assi della terna principale, e di volume $V = d_1 d_2 d_3$ (Figura 7).

In questo riferimento, con le ipotesi fatte all'inizio di questo paragrafo, il tensore gradiente della velocità assume la forma: $(\nabla \mathbf{u})_{ij} = e_{ij} = u_{i,j} \delta_{ij} = b_i \delta_{ij}$. Dopo la deformazione, avvenuta nel tempo Δt , i lati rimangono paralleli in quanto tutti i punti che si trovano lungo gli assi coordinati restano sugli assi coordinati stessi. Il lato inizialmente di lunghezza d_i , dopo la deformazione sarà:

$$d_i' = d_i + b_i \Delta t d_i = d_i (1 + b_i \Delta t) \quad (101)$$

quindi il volume al tempo Δt è dato da:

$$V' = V (1 + b_1 \Delta t) (1 + b_2 \Delta t) (1 + b_3 \Delta t) \quad (102)$$

A meno di termini di ordine superiore la variazione relativa di volume nell'unità di tempo è data da:

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = b_1 + b_2 + b_3 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{div}(\mathbf{u}) \quad (103)$$

La divergenza, che è la traccia del tensore gradiente della velocità, è invariante rispetto un cambiamento di sistema di riferimento, pertanto il suo significato di velocità di variazione volumetrica relativa rimane valido in qualsiasi sistema di riferimento. Nel caso di fluidi omogenei incomprimibili, per i quali ogni porzione di fluido mantiene costante il suo volume, la velocità di variazione è nulla per cui deve essere nulla anche la divergenza, come sarà in seguito dimostrato anche per mezzo dell'equazione di bilancio della massa.

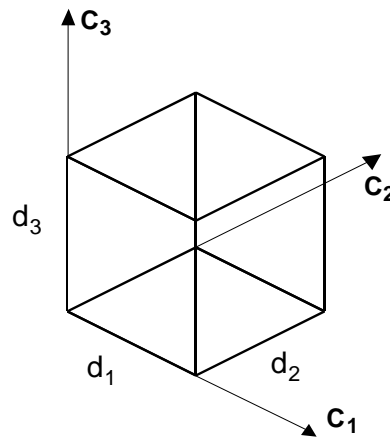


FIGURA 7

Osservando che la divergenza di \mathbf{u} , oltre ad essere la traccia del gradiente di velocità è anche la traccia del tensore velocità di deformazione, il risultato testé ottenuto consente una ulteriore scomposizione del tensore gradiente di velocità trasposto. Possiamo scomporre, infatti, $\underline{\underline{e}}$ in parte sferica e parte deviatoria*:

$$\nabla \mathbf{u}^t = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} + \left(\underline{\underline{e}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{e}}) \underline{\underline{I}} \right) + \underline{\underline{r}}; \quad (104)$$

* Ogni tensore $\underline{\underline{A}}$ può essere scomposto come: $\underline{\underline{A}} = 1/3 \text{tr}(\underline{\underline{A}}) \underline{\underline{I}} + [\underline{\underline{A}} - 1/3 \text{tr}(\underline{\underline{A}}) \underline{\underline{I}}]$. Il primo termine rappresenta la parte sferica ed il secondo la parte deviatoria.

ottenendo così la descrizione locale del moto come somma di tre termini: il primo rappresenta la velocità di variazione volumetrica; il secondo, che per definizione ha traccia nulla, descrive una velocità di deformazione a volume costante; mentre il terzo, al solito, rappresenta la velocità di rotazione rigida.

2.4. Descrizione lagrangiana ed euleriana di un campo

Nella meccanica dei fluidi i fenomeni fisici sono descritti attraverso campi scalari o vettoriali che rappresentano le grandezze fisiche che caratterizzano il fenomeno. Se per esempio si intende studiare il moto convettivo di un fluido, le grandezze che lo descriveranno saranno un campo scalare, la temperatura, ed uno vettoriale, la velocità. La descrizione di questi campi può avvenire in due modi fondamentali:

- *lagrangiano* o materiale, secondo il quale si descrive la variazione temporale delle grandezze seguendo il moto di ciascuna particella;
- *euleriano* o locale, secondo il quale, fissata una posizione, si descrive ciò che accade in quel punto al passare del tempo.

Questo corrisponde anche a due modi diversi nei quali è possibile misurare le grandezze fisiche: supponiamo, ad esempio, di voler misurare la temperatura in un flusso determinato dalla convezione. Potremmo disperdere nel fluido piccole particelle costituite da cristalli liquidi; queste sostanze hanno la caratteristica di cambiare colore in funzione della temperatura; se, inoltre, le particelle sono sufficientemente piccole ed hanno una densità vicina a quella del fluido nel quale sono immerse, possiamo senz'altro supporre che esse seguano fedelmente il moto del fluido. Quindi, seguendo ciascuna delle particelle nel suo moto ed osservando le sue variazioni di colore potremo risalire alle variazioni della temperatura su di una particella fluida: avremo ottenuto, in questo caso, una descrizione lagrangiana del campo. Se, al contrario, utilizziamo una sonda fissa in un punto del campo, per esempio una termocoppia, ed osserviamo come varia la temperatura in quel punto, otteniamo una descrizione euleriana.

2.4.1. Descrizione Euleriana

Fissata una posizione \mathbf{x} , si osserva ciò che accade in quel punto al passare del tempo ad una grandezza A che caratterizza il comportamento del fluido: temperatura, velocità, pressione, ecc.. Le variabili indipendenti sono dunque la posizione \mathbf{x} ed il tempo:

$$A = A(\mathbf{x}, t).$$

La sua evoluzione temporale è descritta per mezzo della cosiddetta derivata *euleriana*, che si ottiene derivando rispetto al tempo il campo della grandezza A , mantenendo fissa la posizione dello spazio:

$$\left(\frac{\partial A(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}=\text{cost.}}$$

2.4.2. Descrizione Lagrangiana

Per poter effettuare questo tipo di descrizione è necessario innanzitutto identificare univocamente ogni particella fluida con una etichetta. Poiché in un fluido, che è un mezzo continuo, le particelle non sono un insieme numerabile, ma ha le dimensioni di \mathfrak{R}^3 (le stesse dello spazio euclideo in cui si muovono), le particelle non potranno essere contraddistinte attraverso un numero intero, sarà invece necessaria una terna di numeri reali. La scelta che viene convenzionalmente fatta

è quella di identificare le particelle per mezzo della posizione, \mathbf{x}_0 che esse assumono in un istante di riferimento, o istante iniziale.

Una volta identificata, la particella è seguita nel tempo, determinando, ad esempio, l'equazione della sua traiettoria:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t) \quad (105)$$

sono individuate nello stesso modo le altre grandezze relative alla particella: temperatura, pressione, ecc.. Per una generica grandezza A avremo:

$$A = A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t).$$

Le variabili indipendenti, in questa descrizione del moto, sono le tre coordinate iniziali $x_{0,i}$ ed il tempo, t .

La derivata *sostanziale* (o materiale o lagrangiana) di una assegnata grandezza, A , è definita dalla derivata parziale rispetto al tempo, avendo tenuta fissa la particella, quindi con \mathbf{x}_0 fissato:

$$\frac{DA}{Dt} = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost.}}$$

In particolare la velocità e l'accelerazione di una particella sono date da:

$$u_i(\mathbf{x}_0, t) = \left(\frac{\partial x_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost}}$$

$$a_i(\mathbf{x}_0, t) = \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost}} = \left(\frac{\partial^2 x_i(\mathbf{x}_0, t)}{\partial t^2} \right)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost}}$$

Per trovare che relazione ci sia tra la derivata euleriana e quella lagrangiana, consideriamo il differenziale di $A(\mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t), t)$, mantenendo fisso \mathbf{x}_0 , che è dato da:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial t} dt + \frac{\partial A}{\partial X_j} dX_j \quad (106)$$

e quindi:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial X_j} \frac{dX_j}{dt} \quad (107)$$

Il termine $(dX_j/dt)_{\mathbf{x}_0 = \text{cost.}}$ rappresenta proprio la derivata rispetto al tempo della posizione della particella e quindi la velocità u_j . La derivata lagrangiana può essere dunque scritta come:

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial X_j} u_j, \quad (108)$$

nella quale il primo termine a secondo membro rappresenta la derivata euleriana.

In particolare, nel caso in cui A sia la velocità, si ottiene l'accelerazione:

$$a_i = \frac{Du_i}{Dt} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j ;$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \mathbf{u}^t \cdot \mathbf{u}$$
(109)

Alla stessa relazione si può pervenire per altra via. Si consideri una particella P che, all'istante t, occupa la posizione \mathbf{x} . Trascorso un intervallo di tempo Δt , la particella P si porta in P', di coordinate $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}$. Individuiamo con Q la particella che al tempo $t + \Delta t$ si porta proprio nella posizione che al tempo iniziale t era occupata dalla particella P (Figura 8).

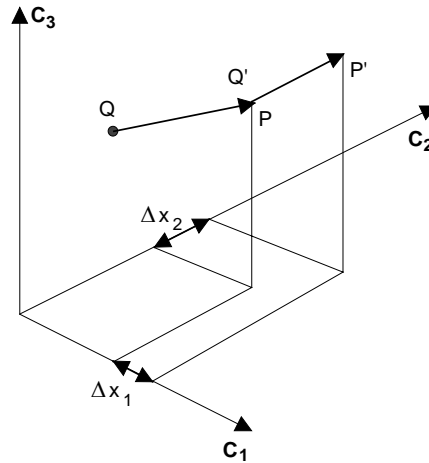


FIGURA 8

La variazione locale della grandezza A è data dalla:

$$A(Q') - A(P) = \frac{\partial A}{\partial t} \Delta t$$
(110)

ed è quindi rappresentata dalla derivata parziale rispetto al tempo. Se consideriamo la variazione (lagrangiana) di A sulla particella P:

$$A(P') - A(P) = \{A(P') - A(Q')\} + \{A(Q') - A(P)\}$$
(111)

la quantità $\{A(P') - A(Q')\}$ è la differenza tra i valori che la quantità A assume, nello stesso istante, in punti differenti; questa quantità è dunque data da:

$$A(P') - A(Q') = \frac{\partial A}{\partial x_j} \Delta x_j$$
(112)

Quindi la derivata lagrangiana risulta:

$$\frac{DA}{Dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A(P') - A(P)}{\Delta t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt}$$
(113)

Si può osservare che, essendo dx_j/dt le componenti della velocità della particella P, si arriva alla relazione precedentemente ottenuta.

Per riepilogare i diversi tipi di derivate temporali che è possibile calcolare, si considerino, ad esempio, in un corso d'acqua, tre punti di vista:

- quello di un sasso poggiato sul fondo che rimane fermo nel tempo;
- quello di una foglia che viene trasportata dalla corrente ed ha quindi la stessa velocità del fluido con cui è a contatto;
- quello di un pesce libero di muoversi in qualsiasi direzione con qualsiasi velocità.

La generica derivata rispetto al tempo di una grandezza associata al fluido è quella effettuata dal pesce che si sposta di Δx nel tempo Δt :

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) = \frac{\partial A}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} \quad (114)$$

In questo caso dx_i / dt è la velocità del pesce ma non quella del fluido. La derivata parziale rispetto al tempo, $\partial A / \partial t$, è quella effettuata dal punto di vista del sasso, mentre la derivata lagrangiana, o sostanziale, è quella effettuata dal punto di vista della foglia.

2.5. Classificazione dei moti

A seconda del parametro considerato i moti di un fluido possono essere classificati in vario modo; alcune possibili classificazioni sono:

- *Tridimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da tutte le variabili indipendenti spaziali.
- *Bidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da due variabili indipendenti spaziali; se tali variabili sono due coordinate cartesiane si parla di moto piano; se tali variabili sono θ e r in coordinate cilindriche si parla di moto assialsimmetrico.
- *Unidimensionale*: se le grandezze che caratterizzano il moto dipendono da una sola variabile spaziale indipendente; è questo il caso del moto in un condotto.
- *Permanenti o stazionari*: se le grandezze che caratterizzano il moto non dipendono dal tempo; in tal caso, in una descrizione euleriana, sono nulle le derivate spaziali rispetto al tempo.
- *Subcritici o supercritici*: a seconda che la velocità del fluido sia molto inferiore o comparabile alla velocità di propagazione delle piccole perturbazioni.

Sono definiti inoltre i seguenti luoghi geometrici:

- *Traiettoria di una particella*: il luogo dei punti occupati in tempi successivi dalla stessa particella fluida;
- *Linea di corrente (o linea di flusso)*: è una linea che ha per tangente il vettore velocità in ogni punto;
- *Linea di fumo*: è il luogo dei punti occupati, ad un dato istante, dalle particelle che sono passate per uno stesso punto.

Nel caso di moto permanente i tre luoghi geometrici, precedentemente introdotti, coincidono.

3. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI

3.1. I principi della meccanica dei fluidi

La meccanica dei fluidi è basata su due classi di ipotesi fondamentali dalle quali si parte per ottenere un sistema di equazioni differenziali in cui vi siano tante equazioni quante incognite: i *principi di bilancio*, che caratterizzano la dinamica dei fluidi, e le *equazioni costitutive e di stato*, che stabiliscono delle relazioni tra stato tensionale e deformazioni (o meglio, velocità di deformazione) per ciascun fluido.

I principi sui quali si basa la dinamica dei fluidi sono:

1. *Principio di conservazione della massa*: La massa di una qualsiasi porzione di fluido è costante. Sia V_m un volume costituito sempre dalla stessa porzione di materia, ovvero un *volume materiale*, la sua massa è data da:

$$m = \int_{V_m} \rho dV ; \quad (115)$$

quindi, questo principio può essere espresso come:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho dV = 0. \quad (116)$$

2. *Principio di bilancio della quantità di moto* (Eulero, 1752): La variazione della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido è pari alla risultante delle forze esterne che agiscono sulla porzione di fluido stessa; facendo ancora riferimento ad un volume materiale, V_m , la sua quantità di moto, \mathbf{q} , è:

$$\mathbf{q} = \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV \quad (117)$$

e, indicando con \mathbf{R} la risultante delle forze esterne che agiscono su V_m , il principio può essere espresso come:

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{R} ; \quad (118)$$

3. *Principio di bilancio del momento della quantità di moto* (Eulero, 1775): La variazione del momento della quantità di moto, nell'unità di tempo, di una qualsiasi porzione di fluido è pari al momento risultante delle forze esterne che agiscono sulla porzione di fluido stessa. Il momento della quantità di moto di un volume materiale, V_m , calcolato rispetto all'origine degli assi, è un tensore definito da:

$$\underline{\underline{\mathbf{k}}} = \int_{V_m} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u} dV \quad (119)$$

e, indicando con $\underline{\underline{K}}_e$ il momento risultante delle forze esterne che agiscono su V_m possiamo esprimere il principio come:

$$\frac{D\underline{\underline{K}}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u} dV = \underline{\underline{K}}_e. \quad (120)$$

Data la corrispondenza tra prodotto tensore e prodotto vettore, questo bilancio può anche essere espresso in funzione del prodotto vettore, utilizzando la tradizionale definizione di momento di un vettore, ed assumendo così una forma pseudo-vettoriale:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{K}_e. \quad (121)$$

Il principio di conservazione della massa, affermando che la stessa porzione di fluido ha sempre la stessa massa, stabilisce che essa è una proprietà intrinseca della materia intesa come mezzo continuo. Il secondo principio, quello di bilancio della quantità di moto, stabilisce invece, come vedremo più avanti, a quale accelerazioni è soggetto un fluido sui quale agisce un determinato sistema di forze, e stabilisce inoltre che questa relazione si esplica attraverso la massa per unità di volume, ovvero la densità; quindi esso può essere considerato una definizione di massa per i mezzi continui. Il principio di bilancio del momento della quantità di moto, infine, permette di stabilire alcune importanti caratteristiche di simmetria dello stato tensionale di un fluido.

3.2. Teorema di Reynolds

Quella data di anzi costituisce una formulazione lagrangiana dei principi, infatti le equazioni sopra scritte fanno riferimento non a luoghi definiti dello spazio ma a porzioni di materia identificate con volumi materiali. Per passare ad una descrizione euleriana abbiamo bisogno di trovare un'espressione euleriana per la derivata materiale di un integrale su di un volume V_m che dipende dal tempo; questa ci è data dal *teorema del trasporto* o di Reynolds.

La derivata sostanziale dell'integrale di una grandezza A in un volume materiale $V_m(t)$, racchiuso dalla superficie S_m , è data da:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t')} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\int_{V_m(t)} A(t') dV + \int_{\Delta V_m} A(t') dV - \int_{V_m(t)} A(t) dV}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\Delta V} \frac{A(t') dV}{\Delta t} \end{aligned} \quad (122)$$

essendo $t' = t + \Delta t$ e $\Delta V = V_m(t') - V_m(t)$. Il primo termine dell'ultimo membro rappresenta il limite per Δt che tende a zero del rapporto incrementale della grandezza A rispetto alla variabile t , eseguita su di un volume fisso, $V_c = V_m(t)$:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{V_m(t)} \frac{[A(t') - A(t)]}{\Delta t} dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV$$

V_c è un volume, detto *di controllo*, che non dipende dal tempo e che gode della proprietà di coincidere con V_m all'istante t . Per ciò che riguarda il secondo termine, dalla Figura 9 si deduce che:

$$dV = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS \quad (123)$$

quindi:

$$\Delta V = \int_{S_m(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \Delta t dS. \quad (124)$$

inoltre, essendo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} A(t') = A(t) \quad (125)$$

e $S_m(t) = S_c$, la superficie del volume di controllo, si ha:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV = \int_{V_c} \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_{S_c} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (126)$$

Il volume V_c non dipende dal tempo, quindi si può portare la derivata fuori dal segno di integrale, ottenendo la:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} A dV}_{\text{II}} + \underbrace{\int_{S_c} \mathbf{A} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS}_{\text{III}}} \quad (127)$$

che è una prima formulazione del teorema di Reynolds, la quale può essere così letta: la variazione della quantità A , integrata su di un volume materiale (termine I), è data dalla somma della variazione di A all'interno del volume di controllo (termine II) e del flusso di A attraverso la superficie S_c (termine III). Nel caso in cui A ed \mathbf{u} siano di classe C^1 , applicando il teorema di Green alla penultima equazione si ricava inoltre:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV = \int_{V_c} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{A} \mathbf{u}) \right] dV = \int_{V_c} \left[\frac{\partial A}{\partial t} + u_i \frac{\partial A}{\partial x_i} + A \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] dV \quad (128)$$

da cui:

$$\boxed{\frac{D}{Dt} \int_{V_m} A dV = \int_{V_c} \left(\frac{DA}{Dt} + A \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV} \quad (129)$$

che costituisce la seconda formulazione di questo teorema.

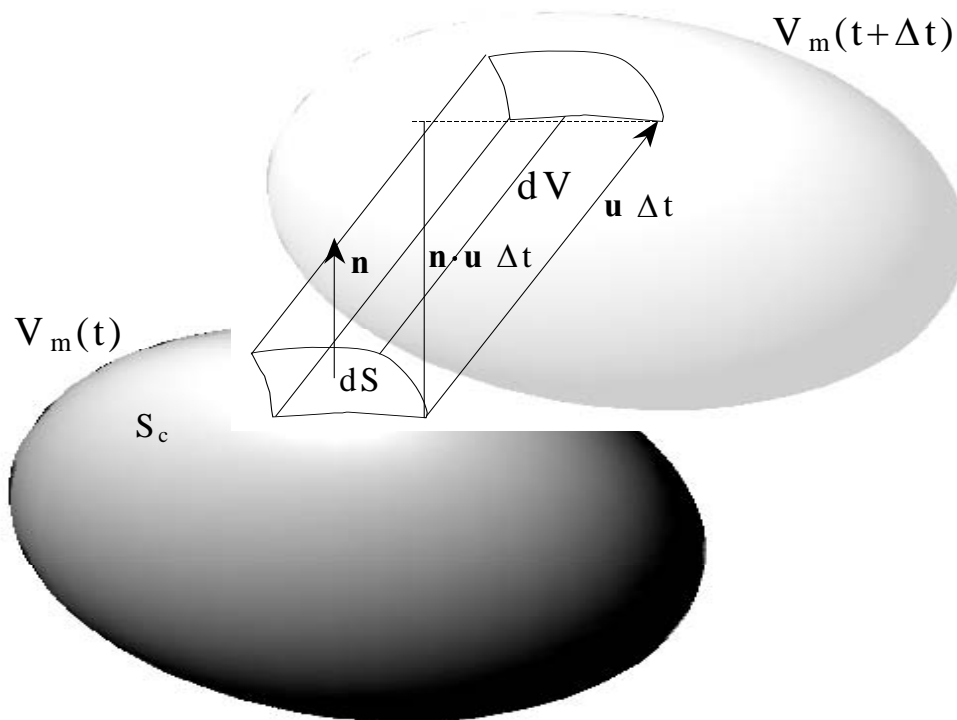


FIGURA 9

3.3. Conservazione della massa

3.3.1. Forma globale

La massa, m , di un volume materiale, contenente sempre le stesse particelle, rimane costante con il tempo:

$$\frac{Dm}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m(t)} \rho dV = 0 \quad (130)$$

applicando il teorema di Reynolds nella sua prima formulazione,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho dV + \int_{S_c} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (131)$$

si ottiene l'equazione di conservazione della massa in forma globale:

$$\boxed{\frac{\partial m}{\partial t} + \Phi_m = 0}, \quad (132)$$

dove con Φ_m è stato indicato il flusso di massa attraverso la superficie del volume di controllo.

3.3.2. Forma locale

Applicando invece il teorema di Reynolds nella sua seconda formulazione si ha:

$$\int_{V(t)} \left[\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV = 0. \quad (133)$$

Affinché la relazione precedente sia verificata per qualsiasi V , ipotizzando che sia ρ sia \mathbf{u} siano funzioni continue ed a derivata continua, occorre che la funzione integranda sia nulla in tutto il campo; si ottiene quindi l'equazione di conservazione della massa in forma differenziale, o come viene a volte chiamata, l'*equazione di continuità*:

$$\boxed{\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (134)$$

che può anche essere riscritta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (135)$$

Lo stesso risultato si può ottenere considerando dal punto di vista euleriano, il flusso entrante ed uscente attraverso la superficie che delimita un parallelepipedo infinitesimo fisso.

Se $\rho = \text{cost.}$, cioè se il fluido è incomprimibile, il campo risulta essere solenoidale:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (136)$$

E' utile osservare che per ottenere l'equazione di bilancio della massa nella sua forma locale è stato necessario formulare l'ipotesi che sia la densità che la velocità siano funzioni continue, a derivata continua, nello spazio. Tale ipotesi non è invece richiesta per ottenere la formulazione globale, che quindi riveste un carattere di maggiore generalità essendo applicabile anche quando all'interno del volume di controllo siano presenti discontinuità. Ciò vale sia nella formulazione della conservazione della massa, che si sta qui trattando, sia nelle formulazioni analoghe per il bilancio della quantità di moto e del momento della quantità di moto che saranno ricavate nel seguito.

3.4. Bilancio della quantità di moto

3.4.1. Forma globale

La variazione della quantità di moto \mathbf{q} del fluido contenuto in un volume materiale, V_m , composto sempre dalle stesse particelle, è pari alla risultante delle forze esterne \mathbf{R} :

$$\frac{D\mathbf{q}}{Dt} = \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{R}. \quad (137)$$

Applicando il teorema di Reynolds nella prima formulazione:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} (\rho \mathbf{u}) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (138)$$

o, per componenti:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} (\rho u_i) dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho u_i) dV + \int_{S_c} (\rho u_i) u_j n_j dS. \quad (139)$$

Scomponiamo ora la risultante delle forze esterne, \mathbf{R} , in una parte dovuta alle forze proporzionali alla massa ed in una dovuta alle forze applicate alla superficie. Se consideriamo un generico elementino della superficie, ΔS , con normale \mathbf{n} (esterna), sottoposto ad una forza di superficie $\Delta \mathbf{F}_s$, in congruenza con l'ipotesi del continuo esisterà e sarà funzione continua di classe C^n il limite:

$$\mathbf{t}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_s}{\Delta S} \quad (140)$$

che chiameremo *sforzo* relativo alla normale \mathbf{n} . Con riferimento alla Figura 10 \mathbf{t}_n rappresenta la forza, per unità di superficie, esercitata attraverso la faccia positiva sul fluido a contatto con la faccia negativa.

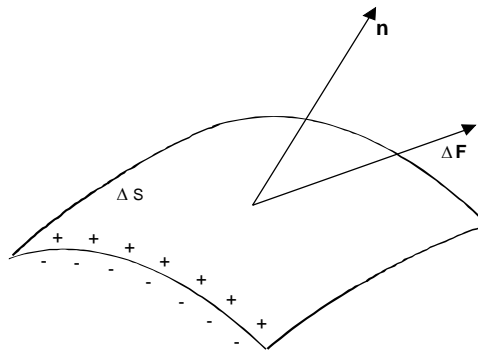


FIGURA 10

Analogamente esisterà e sarà funzione continua di classe C^n il limite:

$$\mathbf{f} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{F}_v}{\Delta m} \quad (141)$$

dove $\Delta \mathbf{F}_v$ sono le forze che agiscono su di un elementino di volume ΔV e Δm è la sua massa. Con queste posizioni il bilancio della quantità di moto diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} (\rho \mathbf{u}) dV + \int_{S_c} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS, \quad (142)$$

e ponendo:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{I} \quad \text{Risultante delle forze di inerzia locali}$$

$$\int_{S_c} \rho \mathbf{u} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dS = \mathbf{M} \quad \text{Flusso di quantità di moto}$$

$$\int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV = \mathbf{G} \quad \text{Risultante delle forze di massa}$$

$$\int_{S_c} \mathbf{t}_n dS = \mathbf{\Pi} \quad \text{Risultante delle forze di superficie}$$

si ottiene l'equazione della quantità di moto in forma globale:

$$\boxed{\mathbf{I} + \mathbf{M} = \mathbf{G} + \mathbf{\Pi}} \quad (143)$$

cioè la risultante delle forze esterne (di massa e di superficie) applicate ad un volume di controllo uguaglia la somma della forza di inerzia locale e del flusso di quantità di moto attraverso la superficie che delimita il volume considerato.

3.4.2. Verso la forma locale

Applichiamo il teorema di Reynolds nella sua seconda formulazione:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho \mathbf{u} dV &= \int_{V_c} \left(\frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} + (\rho \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV = \\ &= \int_{V_c} \left[\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right] dV = \int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \end{aligned} \quad (144)$$

essendo nullo, per la conservazione della massa, il termine tra parentesi tonde nel penultimo membro. Utilizzando, inoltre, la stessa decomposizione delle forze esterne del paragrafo precedente otteniamo:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS \quad (145)$$

Per poter scrivere un'equazione in forma differenziale è necessario trasformare l'integrale di superficie a secondo membro in un integrale di volume. Cerchiamo quindi un altro modo di descrivere lo stato di tensione alla superficie del volume di controllo.

3.5. Tensore delle tensioni

Si consideri il tetraedro limitato dalle superfici di area S_i che giacciono sui piani coordinati e dalla superficie di area S_n , che giace sul piano individuato dalla normale \mathbf{n} (detto *tetraedro di Cauchy*) (Figura 11). Sia inoltre h la distanza tra la superficie S_n e l'origine.

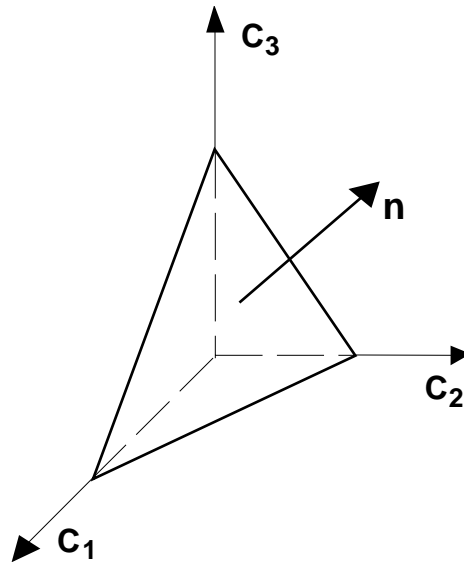


FIGURA 11

Le normali alla superficie sono assunte positive quando sono uscenti dal volume considerato; pertanto le normali positive relative alle facce che giacciono sui piani coordinati sono opposte ai vettori \mathbf{c}_i che individuano gli assi coordinati.

Facciamo ora tendere $h \rightarrow 0$ e valutiamo l'ordine di grandezza dei singoli termini dell'equazione (145): i 2 integrali di volume sono proporzionali al volume V del tetraedro, e di conseguenza ad h^3 , mentre l'integrale di superficie è proporzionale all'area della superficie del tetraedro e quindi ad h^2 . Al limite per h che tende a zero i due integrali di volume saranno allora trascurabili rispetto quello di superficie, e dovrà quindi essere soddisfatta la:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{S_c} \mathbf{t}_n dS = 0, \quad (146)$$

la quale, per il tetraedro di Cauchy, afferma che la somma delle forze di superficie agenti su ciascuna faccia deve annullarsi.

Lo sforzo relativo alla generica superficie S_j , con normale \mathbf{c}_j , sarà indicato con $\boldsymbol{\tau}_j$, e la sua i -esima componente con τ_{ij} ; le componenti di questi tre sforzi possono essere ordinate secondo gli elementi di una matrice:

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}. \quad (147)$$

In modo analogo indicheremo con $\boldsymbol{\tau}_n$ lo sforzo sulla quarta faccia, che ha per normale \mathbf{n} . Le $\boldsymbol{\tau}_i$ sono relative alle normali \mathbf{c}_i , interne al tetraedro, e rappresentano le forze che il tetraedro esercita sul resto del fluido. Esse sono quindi uguali ed opposte alle sollecitazioni esterne che subisce il tetraedro. Per soddisfare la (146) dovrà essere:

$$\boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_1 S_1 - \boldsymbol{\tau}_2 S_2 - \boldsymbol{\tau}_3 S_3 = \boldsymbol{\tau}_n S_n - \boldsymbol{\tau}_i S_i = 0, \quad (148)$$

dividendo per S_n :

$$\boldsymbol{\tau}_n = \frac{S_j}{S_n} \boldsymbol{\tau}_j = \cos \alpha_{nj} \boldsymbol{\tau}_j = \mathbf{n}_j \boldsymbol{\tau}_j, \quad (149)$$

dove α_{nj} è l'angolo formato tra la normale \mathbf{n} e il versore \mathbf{c}_j , ed il suo coseno è pari alla j -esima componente di \mathbf{n} . Utilizzando la matrice precedentemente definita:

$$\tau_{in} = \tau_{ij} n_j. \quad (150)$$

La matrice τ_{ij} rappresenta le componenti di un tensore, perché moltiplicata secondo le regole matriciali per le componenti di un vettore (n_j) fornisce sempre le componenti di un vettore (τ_{in}). Indicheremo questo tensore con $\underline{\underline{\tau}}$, e lo chiameremo *tensore delle tensioni*. Attraverso di esso possiamo esprimere lo sforzo, \mathbf{t}_n , relativo ad un elemento di superficie con una generica normale \mathbf{n} :

$$\boxed{\mathbf{t}_n = \underline{\underline{\tau}} \mathbf{n}}. \quad (151)$$

Questa relazione, che stabilisce l'esistenza del tensore delle tensioni, rappresenta il *teorema fondamentale di Cauchy* (Cauchy, 1822).

3.6. Equazione di Cauchy

Riprendiamo il percorso verso una formulazione locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto, esprimendo gli sforzi attraverso il tensore delle tensioni nella (145):

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}} \mathbf{n} dS \quad (152)$$

ed applicando il teorema della divergenza:

$$\int_{V_c} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V_c} \rho \mathbf{f} dV + \int_{V_c} \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} dV. \quad (153)$$

Questa relazione deve essere valida per qualsiasi volume di controllo V_c , quindi deve sussistere anche tra le funzioni integrande:

$$\boxed{\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}}. \quad (154)$$

La (154), è detta *equazione di Cauchy* e rappresenta la forma locale dell'equazione di bilancio della quantità di moto. Sviluppando la derivata lagrangiana possiamo riscriverla, per componenti:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \rho f_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}. \quad (155)$$

3.7. Bilancio del momento della quantità di moto

3.7.1. Approccio tensoriale

Se scomponiamo le sollecitazioni cui è soggetto il volume materiale in forze di massa e forze di superficie, il principio formulato con l'equazione (120) si può scrivere come:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u} dV = \underline{\underline{K}}_e = \int_{V_m} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_m} \mathbf{x} \wedge (\underline{\underline{\tau}} \mathbf{n}) dS \quad (156)$$

ed applicando il teorema di Reynolds:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u} dV &= \int_{V_c} \frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u}) + (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \\ &= \int_{V_c} (\mathbf{u} \wedge \rho \mathbf{u}) + \left(\mathbf{x} \wedge \frac{D(\rho \mathbf{u})}{Dt} \right) + (\mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \\ &= \int_{V_c} \left(\mathbf{x} \wedge \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) + \left\{ \mathbf{x} \wedge \left[\mathbf{u} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right] \right\} dV = \\ &= \int_{V_c} \mathbf{x} \wedge \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV \end{aligned}$$

L'integrale di superficie può essere riscritto*:

$$\begin{aligned} \int_{S_c} \mathbf{x} \wedge (\underline{\underline{\tau}} \mathbf{n}) dS &= \int_{S_c} 2 \text{skew}(\mathbf{x} \otimes (\underline{\underline{\tau}} \mathbf{n})) dS = \\ &= \int_{V_c} 2 \text{skew}(\nabla \cdot (\mathbf{x} \otimes \underline{\underline{\tau}})) dV = \\ &= \int_{V_c} 2 \text{skew}[\underline{\underline{\tau}}^t \nabla \mathbf{x} + \mathbf{x} \otimes (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}})] dV = \\ &= \int_{V_c} [2 \text{skew}(\underline{\underline{\tau}}^t)] + [\mathbf{x} \wedge (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}})] dV \end{aligned}$$

Sostituendo le due relazioni precedenti nell'equazione di bilancio si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{V_c} \mathbf{x} \wedge \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV &= \int_{V_m} \mathbf{x} \wedge \rho \mathbf{f} dV + \int_{V_c} [2 \text{skew}(\underline{\underline{\tau}}^t)] + [\mathbf{x} \wedge (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}})] dV \\ \int_{V_c} \mathbf{x} \wedge \left(\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \rho \mathbf{f} - \nabla \cdot \underline{\underline{\tau}} \right) dV &= \int_{V_c} 2 \text{skew}(\underline{\underline{\tau}}^t) dV \end{aligned} \quad (157)$$

Il primo termine è nullo per l'equazione di Cauchy. Rimane la parte antisimmetrica del tensore delle tensioni che è nulla poiché il suo integrale deve essere nullo per qualsiasi volume di controllo; ne segue che il tensore delle tensioni è un tensore simmetrico:

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^t \quad (158)$$

Imporre la simmetria del tensore delle tensioni corrisponde quindi a soddisfare il bilancio del momento della quantità di moto e, una volta ammessa questa simmetria, non ci sarà bisogno di fare ulteriori riferimenti ad esso.

* Si ha infatti che: $(\nabla \cdot (\mathbf{x} \otimes \underline{\underline{\tau}}))_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} (x_i \tau_{jk}) = \frac{\partial x_i}{\partial x_k} \tau_{jk} + x_i \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_k} = (\underline{\underline{\tau}}^t \nabla \mathbf{x})_{ij} + (\mathbf{x} \otimes (\nabla \cdot \underline{\underline{\tau}}))_{ij}$

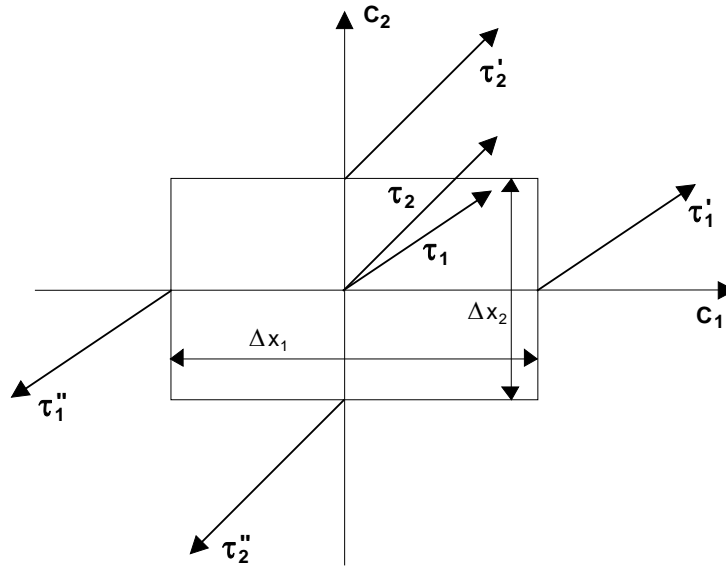


FIGURA 12

3.7.2. Approccio pseudo-vettoriale

Un altro modo di dimostrare la simmetria del tensore delle tensioni è quello di utilizzare l'equazione in forma pseudo-vettoriale. Per capire quali conseguenze porta il principio di bilancio del momento della quantità di moto, applichiamo, attraverso l'equazione (121) ad un elementino parallelepipedo, con i lati paralleli agli assi coordinati e di lunghezza \$\Delta x_i\$ (Figura 12).

Utilizziamo la forma pseudo-vettoriale:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{u} dV = \mathbf{K}_e = \int_{V_m} \mathbf{x} \times \rho \mathbf{f} dV + \int_{S_m} \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS. \quad (159)$$

Sia \$h\$ una lunghezza caratteristica del parallelepipedo. Se facciamo tendere a zero \$h\$, lasciando immutate le proporzioni del parallelepipedo otteniamo, come nel paragrafo precedente, che gli integrali di volume, proporzionali ad \$h^3\$, saranno trascurabili rispetto a quello di superficie, che è proporzionale ad \$h^2\$. Dovrà quindi valere:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \mathbf{x} \times \mathbf{t}_n dS = \mathbf{0}. \quad (160)$$

Ovvero, dovrà annullarsi il momento risultante delle forze di superficie che agiscono sull'elementino.

Siano \$\tau'_i\$ e \$\tau''_i\$ gli sforzi che agiscono su due facce parallele con normale \$\mathbf{c}_i\$ e \$-\mathbf{c}_i\$. A meno di infinitesimi di ordine superiore risulta:

$$-\tau''_i = \tau'_i = \tau_i \quad (161)$$

essendo \$\tau_i\$ lo sforzo relativo alla direzione \$\mathbf{c}_i\$ nell'origine degli assi coordinati. Senza perdita di generalità si suppone che le forze siano applicate al baricentro della superficie relativa.

Si considerino i momenti rispetto all'asse 3; si ha:

$$\tau'_{12} \Delta x_1 \Delta x_3 \frac{\Delta x_2}{2} + \tau''_{12} \Delta x_1 \Delta x_3 \left(-\frac{\Delta x_2}{2} \right) - \tau'_{21} \Delta x_2 \Delta x_3 \frac{\Delta x_1}{2} - \tau''_{21} \Delta x_2 \Delta x_3 \left(-\frac{\Delta x_1}{2} \right) = I_3 \dot{\Omega}_3 \quad (162)$$

essendo $\dot{\Omega}_3$ l'accelerazione angolare ed I_3 il momento di inerzia rispetto l'asse x_3 :

$$I_3 = \rho \Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3 \frac{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}{12} \quad (163)$$

Dividendo entrambi i membri della (162) per $\Delta x_1 \Delta x_2 \Delta x_3$ e facendo tendere a zero il volume del parallelepipedo, si ha:

$$\tau_{12} = \tau_{21} \quad (164)$$

In modo analogo si procede per le altre componenti del tensore. In conclusione, il principio di bilancio del momento della quantità di moto si traduce nell'imporre che il tensore delle tensioni sia simmetrico,

$$\underline{\underline{\tau}} = \underline{\underline{\tau}}^t. \quad (165)$$

3.8. Equazioni costitutive

Come si è accennato nel capitolo precedente, per chiudere il problema della meccanica dei fluidi, oltre alle equazioni di bilancio, che rappresentano i principi fondamentali della meccanica, abbiamo bisogno di equazioni che stabiliscano, per ciascun tipo di fluido, la relazione che c'è tra stato di tensione e stato di deformazione.

In genere uno stato di sollecitazione applicato ad un corpo produce una deformazione ed una variazione della deformazione nel tempo, cioè una velocità di deformazione. Sono definiti solidi quei mezzi continui nei quali, ad uno stato tensionale costante corrisponde una deformazione costante al limite per $t \rightarrow \infty$. Sono definiti fluidi quei mezzi continui nei quali uno stato tensionale costante produce una variazione della deformazione nel tempo ovvero una velocità di deformazione per $t \rightarrow \infty$.

Per scrivere le equazioni costitutive partiamo da tre assiomi fondamentali:

1. gli eventi ad un assegnato istante sono condizionati da eventi passati e non da eventi futuri;
2. lo stato in un punto è determinato solo da ciò che accade nell'intorno del punto stesso;
3. qualsiasi legge fisica è indipendente dal sistema di riferimento scelto.

Per soddisfare il primo assioma è sufficiente supporre che la dipendenza dagli eventi passati sia descritta da una delle variabili che descrivono lo stato termodinamico della particella (per esempio l'entropia). Dal secondo assioma risulta che lo stato di tensione in un punto può essere funzione solo delle variabili cinematiche e termodinamiche e delle loro derivate spaziali del prim'ordine:

$$\tau_{ij} = f_{ij} \left(\mathbf{u}_k, \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial x_m}, \text{variabili termodinamiche} \right) \quad (166)$$

essendo τ_{ij} , u_k e le derivate parziali valutate nello stesso punto e nello stesso istante.

Senza perdere di generalità, possiamo inoltre descrivere lo stato del sistema in un riferimento che abbia la stessa velocità di traslazione e di rotazione della particella fluida, si ha $u_k = 0$ e $r_{mn} = 0$:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_m}{\partial x_n} = \mathbf{r}_{mn} + \mathbf{e}_{mn} = \mathbf{e}_{mn}; \quad (167)$$

quindi, sulla base del terzo assioma:

$$\tau_{ij} = f_{ij}(e_{mn}, \text{variabili termodinamiche}) \quad (168)$$

3.8.1. Fluidi Stokesiani

Sono definiti fluidi *stokesiani*, quei fluidi che godono delle seguenti proprietà:

- sono omogenei, ovvero il legame costitutivo non varia da punto a punto ma è lo stesso in tutto il fluido.
- sono isotropi, ovvero non hanno direzioni preferenziali (segue che a riposo, ovvero in un caso banale di stato di deformazione sferico, il tensore delle tensioni non può che essere sferico e quindi isotropo);
- a riposo, (fluido in quiete, $e_{mn}=0$) il tensore τ_{ij} , che è sferico $\tau_{ij} = 1/3 \text{tr}(\underline{\tau})\delta_{ij}$, è legato alla deformazione ed alle variabili termodinamiche attraverso una *equazione di stato*;
- f_{ij} è continua e derivabile n volte e quindi di classe C^n ;

Il termine che compare nella diagonale del tensore delle tensioni, nel caso di fluido in quiete, è espresso per mezzo della quantità $p = -1/3 \text{tr}(\underline{\tau})$, che è chiamata *pressione*.

In base alle ipotesi precedenti è possibile sviluppare in serie di Taylor f_{ij} :

$$\tau_{ij} = A_{ij}^I + A_{ijmn}^{\text{II}} e_{mn} + A_{ijmnsr}^{\text{III}} e_{mn} e_{sr} + \dots, \quad (169)$$

nella quale i tensori \underline{A} sono, in generale, funzione delle variabili termodinamiche, come la temperatura. Inoltre, essendo il fluido isotropo, i tensori A dovranno essere sferici. I soli tensori del secondo ordine sferici sono quelli che si ottengono moltiplicando il delta di Kronecker per uno scalare. I tensori del quarto ordine sferici sono quelli che si ottengono combinando linearmente i prodotti fra due delta di Kronecker ottenuti permutando i pedici. Quindi:

$$A_{ij}^I = A_0 \delta_{ij} \quad (170)$$

$$A_{ijmn}^{\text{II}} = A_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + A_2 \delta_{im} \delta_{jn} + A_3 \delta_{ni} \delta_{mj} \quad (171)$$

nello stesso modo si può ottenere A_{ijmnsr}^{III} attraverso una combinazione lineare dei prodotti di tre delta di Kronecker ottenuti permutando i pedici, e così via. Si deve notare che oltre ai tensori \underline{A}^i è necessario definire il rapporto tra pressione e deformazione attraverso un'equazione di stato.

3.8.2. Equazione di stato

All'equazione costitutiva deve essere affiancata un'equazione di stato, che metta in relazione la pressione e la deformazione volumetrica o, che è lo stesso la densità (infatti la densità è proprio l'inverso del volume specifico). Nell'ambito di questa trattazione ha interesse considerare 3 tipi di relazioni:

1. Equazione dei *gas perfetti*: $p = \rho R T$, con R costante universale dei gas perfetti e T temperatura. Un'equazione di questo genere è adatta a fluidi come l'aria nel caso in cui sia importante considerarne la comprimibilità.
2. Equazione dei *fluidi barotropici*, per i quali la densità è funzione solo della pressione, $\rho = \rho(p)$, adatta a descrivere il comportamento di fluidi debolmente comprimibili come l'acqua;
3. Ipotesi di *fluido incompressibile*, $\rho = \text{cost.}$, adatta in tutti quei casi nei quali è lecito trascurare la comprimibilità del fluido (sia esso aria o acqua).

3.8.3. Fluidi newtoniani

Sono definiti *fluidi newtoniani* quei fluidi stokesiani che hanno un legame lineare tra sforzi e velocità di deformazione. Nell'espressione (169) potranno quindi comparire solo i termini del tipo A^I ed A^{II} :

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= A_0 \delta_{ij} + (A_1 \delta_{ij} \delta_{mn} + A_2 \delta_{im} \delta_{jn} + A_3 \delta_{ni} \delta_{mj}) e_{mn} \\ &= A_0 \delta_{ij} + A_1 e_{nn} \delta_{ij} + A_2 e_{mj} \delta_{im} + A_3 e_{jn} \delta_{ni} = \\ &= (A_0 + A_1 e_{nn}) \delta_{ij} + A_2 e_{ij} + A_3 e_{ji} = \\ &= (A_0 + A_1 e_{nn}) \delta_{ij} + (A_2 + A_3) e_{ij}\end{aligned}\tag{172}$$

Introdotti i due coefficienti di viscosità:

$$\lambda = A_1 \quad e \quad \mu = \frac{1}{2}(A_2 + A_3),\tag{173}$$

l'equazione costitutiva per i fluidi newtoniani può essere scritta come:

$$\tau_{ij} = (-p + \lambda e_{nn}) \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}\tag{174}$$

o, in forma tensoriale:

$$\underline{\tau} = (-p + \lambda \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{u})) \underline{\mathbb{I}} + 2 \mu \underline{\underline{e}}\tag{175}$$

nella quale λ e μ dipendono dalla temperatura.

3.8.3.1. Equazione costitutiva in una terna principale di riferimento

Si sarebbe potuto procedere anche in un altro modo per giungere all'equazione costitutiva per i fluidi newtoniani.

Il tensore degli sforzi τ_{ij} è simmetrico: ciò implica che esiste una terna di riferimento principale. Analogamente esiste una terna principale per il tensore simmetrico velocità di deformazione e_{mn} . Essendo i fluidi stokesiani isotropi le terne principali dei due tensori coincidono.

Per i fluidi newtoniani, la relazione fra sforzi e velocità di deformazione è lineare, quindi nella terna principale si ha:

$$\hat{\tau}_{11} = -p + a_1 \hat{e}_{11} + b_1 \hat{e}_{22} + c_1 \hat{e}_{33}\tag{176}$$

$$\hat{\tau}_{22} = -p + a_2 \hat{e}_{22} + b_2 \hat{e}_{33} + c_2 \hat{e}_{11}$$

$$\hat{\tau}_{33} = -p + a_3 \hat{e}_{33} + b_3 \hat{e}_{11} + c_3 \hat{e}_{22}$$

I coefficienti a_i sono relativi alla direzione di applicazione dello sforzo, ed i termini b_i e c_i si riferiscono alle direzioni ortogonali. Per simmetria, tenuto conto dell'isotropia del fluido, risulta:

$$a_1 = a_2 = a_3 = a\tag{177}$$

$$b_1 = c_1 = b_2 = c_2 = b_3 = c_3 = b$$

Quindi:

$$\begin{aligned}\hat{\tau}_{11} &= -p + a\hat{e}_{11} + b\hat{e}_{22} + b\hat{e}_{33} = \\ &= -p + a\hat{e}_{11} - b\hat{e}_{11} + b\hat{e}_{11} + b\hat{e}_{22} + b\hat{e}_{33} = \\ &= -p + (a - b)\hat{e}_{11} + b\hat{e}_{mm}\end{aligned}\quad (178)$$

Analoghe relazioni si ottengono per τ_{22} e τ_{33} . Introdotti i coefficienti di viscosità:

$$\lambda = b \quad 2\mu = a - b \quad (179)$$

si ricava:

$$\hat{\tau}_{ij} = (-p + \lambda \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}})\delta_{ij} + 2\mu\hat{e}_{ij} \quad (180)$$

Per l'assioma di indipendenza dal riferimento la legge trovata deve valere, con le opportune trasformazioni, anche in riferimenti diversi :

$$\tau_{mn} = \hat{\tau}_{ij}c_{mi}c_{nj} \quad (181)$$

$$\tau_{mn} = (-p + \lambda \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}})c_{mi}c_{ni} + 2\mu\hat{e}_{ij}c_{mi}c_{nj}$$

$$\tau_{mn} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{mn} + 2\mu e_{mn}$$

che coincide con l'espressione trovata precedentemente.

3.8.3.2. Variazioni di volume

Cerchiamo di descrivere il comportamento del fluido in presenza di una deformazione che corrisponda solo ad una variazione di volume. Conviene, a questo scopo, calcolare la parte sferica del tensore degli sforzi:

$$1/3 \operatorname{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \underline{\underline{I}} = -p \underline{\underline{I}} + (\lambda + 2/3\mu)e_{mm} \underline{\underline{I}}. \quad (182)$$

La quale può essere interpretata asserendo che la parte sferica dello stato di tensione del fluido è composta da un termine corrispondente allo stato di tensione che avrebbe a riposo (-p), che dipende solo dalla deformazione volumetrica attraverso l'equazione di stato, e da un termine legato alla velocità con la quale avviene la deformazione volumetrica, $e_{mm} = \nabla \cdot \mathbf{u}$.

Nei fluidi che hanno interesse nell'ambito di questo corso (acqua, aria) l'effetto della viscosità sulla velocità di variazione di volume è senz'altro trascurabile, quindi lo stato di tensione non deve dipendere da e_{mm} ; pertanto deve risultare:

$$3\lambda + 2\mu = 0 \Rightarrow \lambda = -2/3\mu. \quad (183)$$

Con questa posizione avremo che $p = -1/3 \operatorname{tr}(\underline{\underline{\tau}})$ e l'equazione assume la forma che utilizzeremo d'ora in poi (Stokes, 1845):

$$\underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu [\underline{\underline{e}} - 1/3 (\nabla \cdot \mathbf{u}) \underline{\underline{I}}] \quad (184)$$

Se si osserva che, sotto l'ipotesi ora formulata, essendo $\nabla \cdot \mathbf{u} = \operatorname{tr}(\underline{\underline{e}})$:

$$\underline{\underline{\tau}} + p\underline{\underline{I}} = \operatorname{dev}(\underline{\underline{\tau}}); \quad (\underline{\underline{e}} - 1/3 \nabla \cdot \mathbf{u} \underline{\underline{I}}) = \operatorname{dev}(\underline{\underline{e}}) \quad (185)$$

l'equazione (184) può essere letta come una relazione lineare tra la parte deviatoria del tensore degli sforzi e quella del tensore delle deformazioni:

$$\text{dev}(\underline{\tau}) = 2 \mu \text{dev}(\underline{\epsilon}), \quad (186)$$

l'equazione di stato, può essere vista come una relazione che completa le relazioni tra sforzi e deformazioni stabilendo una relazione per la parte sferica del tensore degli sforzi.

Il coefficiente μ , detto *viscosità dinamica* del fluido è, in generale funzione della temperatura. Le sue dimensioni sono: $[M][L^{-1}][T^{-1}]=[F][L^{-2}][T^{-1}]$, e per l'acqua vale:

$$\mu(\theta) = \frac{0.001785}{1 + 0.337 \cdot \theta + 0.000221 \cdot \theta^2} \text{ (N} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s)} \quad (187)$$

con la temperatura, θ , espressa in °C. A 20°C si ha: $\mu = 1 \cdot 10^{-3} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$. Per l'aria, sempre a 20°C, la viscosità è: $\mu = 1.808 \cdot 10^{-5} \text{ N m}^{-2} \text{ s}$.

3.9. Equazioni di Navier-Stokes

Introdotta l'equazione costitutiva in quella di Cauchy, supponendo che i coefficienti di viscosità λ e μ siano costanti, si ottiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\left(-p + \lambda \frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) \delta_{ik} + \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \right] = \\ &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_m} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \mu \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k} = \\ &= \rho f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \end{aligned} \quad (188)$$

Dividendo per ρ e posto $\lambda = -2/3 \mu$, si ricava l'equazione di Navier-Stokes (Stokes, 1845):

$$\frac{Du_i}{Dt} = f_i - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{3} \nu \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} \quad (189)$$

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}}$$

avendo indicato con $\nu = \mu/\rho$ la *viscosità cinematica*.

3.9.1. Equazioni di Navier-Stokes in forma adimensionale

Per poter adimensionalizzare le equazioni Navier-Stokes è necessario innanzitutto scegliere 3 grandezze indipendenti fondamentali attraverso le quali sia possibile esprimere tutte le altre. Si deve poi scegliere una scala per ciascuna grandezza fondamentale. Nel nostro caso, una buona scelta può essere quella di considerare una scala delle velocità, U , una scala delle lunghezze, L , ed una scala delle densità ρ_0 . Attraverso queste tre scale possiamo adimensionalizzare le grandezze in gioco.

Consideriamo l'equazione di Navier-Stokes scritta nel caso in cui le uniche forze di massa siano quelle dovute al campo gravitazionale, $\mathbf{f} = -\nabla gz$, (z ascissa verticale diretta verso l'alto):

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = -\nabla gz - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (190)$$

attraverso le scale scelte possiamo scrivere le grandezze adimensionali:

$$x_i^* = x_i / L; \quad \mathbf{u}^* = \mathbf{u} / U; \quad \rho^* = \rho / \rho_0; \quad p^* = p / (\rho_0 U^2); \quad t^* = t / (L / U).$$

Per esprimere le derivate in forma adimensionale ricordiamo che essendo esse operatori lineari si ha:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{1}{(L/U)} \frac{\partial}{\partial t^*} \\ \nabla &= \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \nabla^* \end{aligned} \quad (191)$$

Se sostituiamo nell'equazione precedente:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} \frac{U^2}{L} + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^* \frac{U^2}{L} = -\nabla^* gz^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* \frac{U^2}{L} + \frac{1}{3} \nu \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) \frac{U}{L^2} + \nu \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \frac{U}{L^2} \quad (192)$$

e, dividendo entrambi i membri per U^2 / L , si ottiene:

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\nabla^* \mathbf{u}^*)^T \mathbf{u}^* = -\frac{gL}{U^2} \nabla^* z^* - \frac{1}{\rho^*} \nabla^* p^* + \frac{1}{3} \frac{\nu}{UL} \nabla^* (\nabla^* \cdot \mathbf{u}^*) + \frac{\nu}{UL} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* \quad (193)$$

nella quale possono essere riconosciuti 2 gruppi adimensionali:

$$\text{numero di Reynolds:} \quad R_e = \frac{UL}{\nu}$$

$$\text{numero di Froude} \quad F_r = \sqrt{\frac{U^2}{gL}}$$

che ci permettono di giungere alla forma adimensionale dell'equazione di Navier-Stokes:

$$\boxed{\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\frac{1}{F_r^2} \nabla z - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \frac{1}{R_e} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \frac{1}{R_e} \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (194)$$

nella quale, per semplicità, sono stati omessi gli asterischi che indicano le grandezze adimensionali. Questa forma dell'equazione si presta anche alla interpretazione del significato dei gruppi adimensionali sopra identificati. Supponiamo infatti di aver scelto le scale delle grandezze in modo tale che tutte le grandezze adimensionali, nell'ambito del problema che stiamo considerando, siano di ordine 1, così come le loro derivate adimensionali. Nell'equazione precedente tutti i termini risultano di ordine 1 tranne i due gruppi adimensionali che possono invece assumere un valore qualunque.

Valutando l'ordine di grandezza del numero di Reynolds possiamo stimare quanto importanti siano gli ultimi due termini, quelli legati alla presenza della viscosità, rispetto ai termini a primo membro (che sono termini inerziali). Quindi il numero di Reynolds può essere interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze viscosi. In particolare se $Re \rightarrow \infty$ i termini viscosi saranno trascurabili: la viscosità non influenza in modo significativo il fenomeno che si sta studiando.

L'ordine di grandezza del numero di Froude fornisce invece informazioni sull'ordine di grandezza del termine gravitazionale, e può essere quindi interpretato come una stima del rapporto tra forze di inerzia e forze gravitazionali. Analogamente al caso precedente, se $F_r \rightarrow \infty$ il termine dovuto alle forze gravitazionali può essere trascurato: la presenza della gravità non influenza in modo significativo il nostro fenomeno.

In conclusione si può affermare che, se si fa una scelta oculata delle scale di un fenomeno, la valutazione dei due numeri adimensionali permette di valutare quale sia l'importanza della viscosità e della forza gravitazionale e sotto che condizioni queste possano essere eventualmente trascurate nella trattazione.

3.9.2. Flussi paralleli

Solo in casi particolari si può trovare una soluzione della equazione di Navier-Stokes in forma analitica; un caso particolarmente interessante è quello dei flussi paralleli. E' definito flusso parallelo quello in cui due componenti della velocità sono in tutto il campo uguali a zero:

$$u_1 \neq 0; \quad u_2 = u_3 = 0 \quad (195)$$

Nelle ipotesi di:

- fluido incomprimibile;
- condizioni stazionarie;
- forze di massa gravitazionali: $\mathbf{f} = -\nabla(gz)$, con z ascissa verticale diretta verso l'alto,

l'equazione del bilancio di massa dà:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 \quad (196)$$

quindi la u_1 è funzione di x_2 e di x_3 ; proiettando le equazioni di Navier-Stokes sui tre assi, si ottiene:

$$\begin{cases} 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) + \nu \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right) \\ 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \\ 0 = -g \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{p}{\rho g} + z \right) \end{cases} \quad (197)$$

Se introduciamo la quantità $h = p/\gamma + z$, detta *carico piezometrico*, con $\gamma = \rho g$ *peso specifico* del fluido, si può osservare che essa risulta essere funzione unicamente di x_1 . La sua derivata cambiata di segno viene indicata con $i = -\partial h / \partial x_1$, ed è chiamata *pendenza piezometrica*. Il moto del fluido avviene nel senso dei carichi piezometrici decrescenti e quindi con pendenza piezometrica positiva.

Nel caso bidimensionale piano (*moto di Couette*), in cui tutto è uniforme anche in direzione x_3 , si ha:

$$h = h(x_1); \quad u_1(x_2), \quad (198)$$

quindi:

$$-ig = \nu \frac{d^2 u_1}{dx_2^2}. \quad (199)$$

Il primo membro è funzione della sola x_1 , il secondo membro è funzione della sola x_2 , per poter verificare tale relazione in tutti i punti del campo entrambi i membri devono essere costanti. Integrando due volte si ha:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dx_2} &= \left(\frac{-g}{\nu} \frac{dh}{dx_1} \right) x_2 + k_1; \\ u_1 &= \left(\frac{-gi}{\nu} \right) \frac{x_2^2}{2} + k_1 x_2 + k_2 \end{aligned} \quad (200)$$

si ottiene una relazione che mostra come la distribuzione delle velocità all'interno del campo sia di tipo parabolico.

Le relazioni ottenute possono essere applicate al flusso che scorre fra due piastre distanti b ; nel caso in cui le piastre siano ferme, le condizioni al contorno sono (Figura 13):

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = 0 \quad (201)$$

dalle quali si determinano i valori di k_1 e k_2 ottenendo:

$$u_1(x_2) = \left(\frac{-ig}{2\nu} \right) (x_2 - b)x_2. \quad (202)$$

Nella direzione \mathbf{c}_1 relativamente ad una superficie con normale \mathbf{c}_2 , ricordando l'equazione costitutiva, lo sforzo di taglio è dato da:

$$\tau_{12} = 2\mu e_{12} = \mu \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = -i\gamma \left(x_2 - \frac{b}{2} \right) \quad (203)$$

Alle pareti risulta:

$$\begin{aligned} \tau_{12}(x_2 = 0) &= \frac{1}{2} i \cdot \gamma \cdot b; \\ \tau_{12}(x_2 = b) &= -\frac{1}{2} i \cdot \gamma \cdot b. \end{aligned} \quad (204)$$

Lo sforzo di taglio alla parete è legato alla pendenza piezometrica che bilancia la forza viscosa.

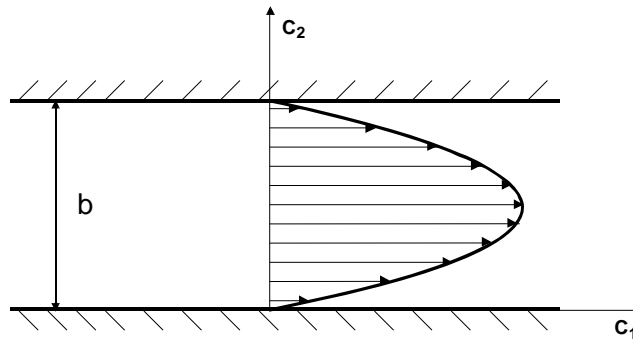


FIGURA 13

Nel caso in cui si abbia invece una parete mobile che scorre con velocità V parallelamente a se stessa, si hanno le seguenti condizioni al contorno:

$$u_1(0) = 0; \quad u_1(b) = V \quad (205)$$

che permettono di valutare i valori delle costanti:

$$u_1 = \frac{-ig}{2\nu} \frac{x_2^2}{2} + \left(\frac{V}{b} + \frac{igb}{2\nu} \right) x_2 \quad (206)$$

La distribuzione delle velocità è ottenuta dalla somma di un termine parabolico e di un termine lineare. Quest'ultimo è quello che si avrebbe nel caso in cui una delle due piastre si muovesse parallelamente a se stessa con velocità V in assenza di gradiente di pressione (Figura 14).

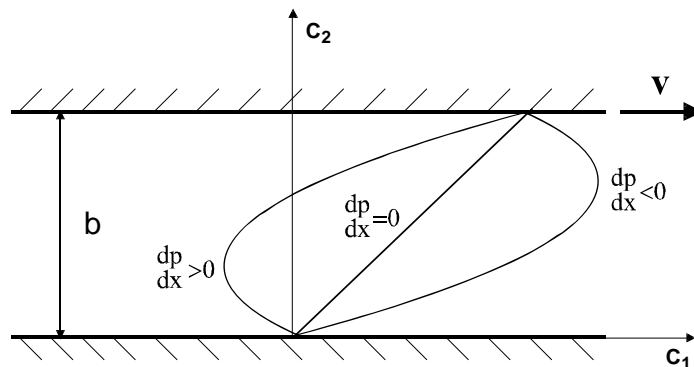


FIGURA 14

3.10. Equazione dell'energia meccanica

Consideriamo un fluido immerso in un campo gravitazionale, l'equazione di Navier-Stokes si può scrivere:

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla gz - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (207)$$

se il fluido è barotropico, il secondo termine a secondo membro diventa:

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = -\nabla \int \frac{dp}{\rho}$$

e quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = -g \nabla \left(z + \int \frac{dp}{g\rho} \right) + \frac{1}{3} v \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + v \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (208)$$

D'altra parte la derivata materiale che compare a primo membro può essere espressa in modo diverso applicando la formula del doppio prodotto vettoriale:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (209)$$

al prodotto $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$:

$$(\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}))_i = u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = (\mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u})_i \quad (210)$$

ovvero:

$$(\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = \mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}) - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}.$$

L'espressione della derivata materiale diventa quindi:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}. \quad (211)$$

Sostituendo la (211) nella (208) e raggruppando i termini sotto gradiente si ottiene:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + g \nabla \left(z + \frac{1}{g} \int \frac{dp}{\rho} + \frac{u^2}{2g} \right) = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + \frac{1}{3} v \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + v \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (212)$$

La quantità tra parentesi tonde rappresenta l'energia meccanica per unità di peso associata al fluido ed è indicata con H ed è chiamata *carico totale*. Questa equazione rappresenta dunque l'equazione dell'energia meccanica per un fluido barotropico soggetto al campo gravitazionale.

Nel caso di fluido incomprimibile si riduce a:

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + g \nabla H = \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} + v \nabla^2 \mathbf{u}}. \quad (213)$$

Il carico totale in questo caso è: $H = z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} = h + \frac{u^2}{2g}$.

Consideriamo infine il caso di flussi nei quali siano trascurabili i termini viscosi rispetto agli altri:

1. Nel caso *irrotazionale* $\boldsymbol{\omega} = (\nabla \times \mathbf{u}) = \mathbf{0}$, il campo di velocità ammette un potenziale, Φ , tale che $\mathbf{u} = \nabla \Phi$. Inoltre il secondo membro della equazione dell'energia è nullo, quindi:

$$\nabla \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g} \right) = 0 \quad (214)$$

che, nel caso *stazionario*, si scrive nella forma nota come *teorema di Bernoulli*:

$$\nabla H = 0 \quad (215)$$

il quale, in questa formulazione afferma che: *nel caso di un flusso stazionario, ed irrotazionale, con viscosità trascurabile, il carico totale si mantiene costante in tutto il campo.*

2. sempre nel caso *stazionario*, ma *proiettando lungo una linea di corrente*, si può notare che $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ è sempre ortogonale ad \mathbf{u} (e quindi alle linee di corrente), quindi otteniamo un'altra forma del *Teorema di Bernoulli* (formulato da Daniel Bernoulli come principio nel 1738):

$$\nabla H \cdot \mathbf{i}_s = \frac{\partial H}{\partial s} = 0. \quad (216)$$

la quale afferma che *in un flusso stazionario, nel caso si possa trascurare la viscosità, il carico totale si mantiene costante lungo le linee di corrente.*

4. BILANCIO DELL'ENERGIA TOTALE

I principi sopra enunciati sono sufficienti a risolvere tutti quei problemi nei quali l'unica forma di energia in gioco sia quella meccanica. Le variabili termodinamiche possono entrare in gioco nelle equazioni costitutive, per esempio introducendo una dipendenza della viscosità dalla temperatura (che risulta un dato del problema). Quando entra in gioco anche l'energia termica allora è necessario fare riferimento anche ai principi della termodinamica.

4.1. Primo principio della termodinamica

Il primo principio della termodinamica permette di affermare che la variazione di energia totale (interna e cinetica) di un sistema costituito da un volume materiale V_m , è pari alla somma del lavoro, L , compiuto dalle forze esterne, e del flusso di calore C che il sistema riceve dall'esterno:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho E dV = L + C. \quad (217)$$

L e C , che hanno le dimensioni di una potenza, sono il lavoro ed il calore scambiati nell'unità di tempo, e sono assunti positivi nel caso in cui lo scambio avvenga verso il sistema; E è l'energia totale per unità di massa:

$$E = U + \frac{1}{2} u_i u_i = U + \frac{1}{2} u_i^2$$

U è l'energia interna per l'unità di massa, legata all'energia cinetica a livello atomico, di cui non si può tener conto nello schema di mezzo continuo:

$$U = c_v T$$

c_v è il calore specifico a volume costante. L'energia interna è funzione di stato di due variabili termodinamiche, ad esempio volume specifico, $v = 1/\rho$, ed entropia, s , per unità di massa, oltre che della particella individuata dalla sua posizione \mathbf{x}_0 all'istante iniziale:

$$U = U(\mathbf{x}_0, v, s)$$

Differenziando la U si ottiene la *relazione di Gibbs*:

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial v} \right)_{s=\text{cost}} dv + \left(\frac{\partial U}{\partial s} \right)_{v=\text{cost}} ds \quad (218)$$

Le derivate parziali introdotte sono rispettivamente la pressione p , a meno del segno, e la temperatura T :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)_{s=\text{cost}} = -p(v,s); \quad \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{v=\text{cost}} = T(v,s).$$

Applicando il teorema di Reynolds nella sua prima formulazione e sviluppando le espressioni del lavoro compiuto nell'unità di tempo dalle forze di superficie e dalle forze di massa nella (217), si ricava:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho E dV \right] + \int_{S_c} \rho E \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{V_c} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} dV + \int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} dS + \int_{V_c} \rho R dV - \int_{S_c} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad \text{I} \qquad \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \qquad \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{IV} \end{aligned} \quad (219)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\int_{V_c} \rho E dV \right] + \int_{S_c} \rho E u_i \cdot n_i dS &= \int_{V_c} \rho f_i \cdot u_i dV + \int_{S_c} \tau_{ij} n_j u_i dS + \int_{V_c} \rho R dV - \int_{S_c} q_i n_i dS \\ &\quad \text{I} \qquad \qquad \qquad \text{II} \qquad \qquad \qquad \text{III} \qquad \qquad \qquad \text{IV} \end{aligned}$$

con:

- I) lavoro delle forze di massa;
- II) lavoro delle forze di superficie;
- III) calore scambiato a distanza con l'esterno (irraggiamento);
- IV) calore scambiato attraverso la superficie (conduzione);

essendo R il calore fornito al volume per irraggiamento per unità di massa e di tempo; il vettore \mathbf{q} il flusso di calore per unità di superficie ed \mathbf{n} la normale uscente.

4.1.1. Forma locale

Utilizzando la seconda formulazione del teorema di Reynolds per calcolare la variazione dell'integrale dell'energia, e tenendo conto della equazione di bilancio di massa, si ottiene:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V_m} \rho E dV = \int_{V_c} \left[\frac{D}{Dt} (\rho E) + \rho E \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV = \int_{V_c} \rho \frac{DE}{Dt} dV, \quad (220)$$

Essendo $\underline{\underline{\tau}}$ un tensore simmetrico si ha:

$$(\underline{\underline{\tau}} \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} = \tau_{ij} n_j u_i = \tau_{ji} u_i n_j = (\underline{\underline{\tau}} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$$

e applicando il teorema della divergenza agli integrali superficiali si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia totale in forma differenziale:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \left(\frac{DU}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \frac{D\mathbf{u}}{Dt} \right) &= \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \nabla \cdot (\underline{\underline{\tau}} \mathbf{u}) + \rho R - \nabla \cdot \mathbf{q} \\ \rho \frac{DU}{Dt} + \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} &= \rho f_i u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij} u_j) + \rho R - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \end{aligned}} \quad (221)$$

e sostituendovi l'equazione costitutiva:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}]$$

si ottiene:

$$\rho \frac{DU}{Dt} + \rho u_i \frac{Du_i}{Dt} = \rho f_i u_i - \frac{\partial(pu_i)}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\sigma_{ij} u_j) + \rho Q - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \quad (222)$$

la quale rappresenta l'equazione dell'energia totale per i fluidi newtoniani.

4.2. Equazione di bilancio dell'energia termica

Moltiplicando tutti i termini della i -esima componente dell'equazione di Cauchy, (154), per u_i si ottiene l'equazione di bilancio dell'energia meccanica in termini di potenza:

$$\left(\rho \frac{Du_i}{Dt} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho f_i \right) u_i = 0 \quad (223)$$

che, sottratta all'equazione di bilancio dell'energia totale (221) porta all'equazione di bilancio dell'energia termica in termini di energia interna:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho \frac{DU}{Dt} &= \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho R \\ \rho \frac{DU}{Dt} &= \underline{\underline{\tau}} : \nabla \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho R \end{aligned}} \quad (224)$$

Sostituendo nella precedente l'equazione costitutiva:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + [\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u})\delta_{ij} + 2\mu e_{ij}]$$

si ottiene:

$$\rho \frac{DU}{Dt} = -p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho R \quad (225)$$

Tenendo conto dell'equazione di bilancio della massa

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt}$$

si ha:

$$\rho \left(\frac{DU}{Dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \right) = \rho \left(\frac{DU}{Dt} + p \frac{Dv}{Dt} \right) = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho R \quad (226)$$

L'equazione di bilancio dell'energia termica assume la seguente forma in termini di entropia:

$$\rho T \frac{Ds}{Dt} = \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \rho R \quad (227)$$

4.3. Relazione di Fourier

Sulla base degli stessi assiomi che hanno portato alle equazioni costitutive tra sforzi e velocità di deformazione viene ricavata la relazione costitutiva esistente tra flusso di calore e gradienti di temperatura:

$$q_i = F_i(T, \frac{\partial T}{\partial x_j}, \text{variabili termodinamiche}) \quad (228)$$

poiché tale relazione è invariante rispetto ad un cambiamento del sistema di riferimento, non ci può essere la dipendenza da T. Sviluppando in serie di Taylor si ha:

$$q_i = A_i + A_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} + A_{ijm} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_m} + \dots \quad (229)$$

nella ipotesi di:

- flusso di calore nullo in assenza di gradienti di temperatura;
- comportamento isotropo e quindi tensori A sferici;
- legame lineare tra \mathbf{q} , flusso di calore, e gradiente di temperatura;

si ottiene la *relazione di Fourier*:

$$q_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (230)$$

dove K è la conducibilità termica. Il segno meno è introdotto per poter porre K positivo, poiché il calore fluisce dalle zone a temperatura più elevata a quelle a temperatura più bassa, quindi nel verso opposto al gradiente di temperatura.

Ricordando che $U = c_v T$, e supponendo costante per tutto il fluido c_v l'equazione di bilancio dell'energia termica (225) in termini di temperatura si scrive:

$$\boxed{\begin{aligned} \rho c_v \frac{DT}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} &= \sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho R \\ \rho c_v \frac{DT}{Dt} - \frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} &= \underline{\underline{\sigma}} : \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot (K \nabla T) + \rho R \end{aligned}} \quad (231)$$

Se indichiamo con $\mu\Phi$ la dissipazione di energia che si ha per effetti viscosi, nel caso di mezzo omogeneo ($K=\text{cost}$) si ottiene:

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = -p \nabla \cdot \mathbf{u} + K \nabla^2 T + \mu\Phi + \rho R \quad (232)$$

4.4. Teorema di Bernoulli

Supposto che le forze di massa ammettano un potenziale -gz non dipendente dal tempo, si ha:

$$f_i = -\frac{\partial gz}{\partial x_i} \quad (233)$$

$$\rho f_i u_i = -\rho \frac{\partial gz}{\partial x_i} u_i = -\rho \frac{Dgz}{Dt}$$

Tenuto conto che:

$$u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{Dp}{Dt} - \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$p \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = -\frac{p}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \rho p \frac{D}{Dt} \frac{1}{\rho}$$

dalla equazione di bilancio della energia totale (221) risulta:

$$\boxed{\rho \frac{D}{Dt} \left(U + \frac{1}{2} u^2 + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial u_j \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho R - \nabla \cdot \mathbf{q}} \quad (234)$$

la quale fornisce un'altra versione del teorema di Bernoulli: in un fluido non viscoso ($\sigma_{ij} = 0$), che non scambia calore con l'esterno ($\rho Q - \nabla \cdot \mathbf{q} = 0$) ed in regime stazionario ($\partial p / \partial t = 0$), la somma dell'energia per unita di massa interna, cinetica, potenziale e di pressione è costante nel tempo lungo una traiettoria.

4.5. Bilancio di entropia

Dividendo l'equazione di bilancio dell'energia termica, scritta in termini di entropia, per la temperatura si ha:

$$\rho \frac{Ds}{Dt} = \frac{\sigma_{ij}}{T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) - \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \rho \frac{R}{T} \quad (235)$$

Integrando su un volume di controllo V_c , utilizzando per il primo membro il teorema di Reynolds e l'equazione di bilancio della massa per riportarsi ad un integrale su di un volume materiale V_m racchiuso dalla superficie S_m , ed applicando il teorema di Green al secondo termine del secondo membro si ottiene:

$$\underbrace{\frac{D}{Dt} \int_V \rho s dV}_I = \underbrace{\int_V \frac{\rho R}{T} dV}_{II} - \underbrace{\int_S \frac{q_i n_i}{T} dS}_{III} + \underbrace{\int_V \frac{\sigma_{ij}}{T} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV}_{IV} - \underbrace{\int_V \frac{q_i}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} dV}_V \quad (236)$$

essendo:

- I la variazione di entropia di tutto il volume fluido;
- II una sorgente di entropia dovuta a scambi di calore a distanza; se $R > 0$, ovvero se si ha una trasmissione di calore verso il fluido l'entropia aumenta;
- III il flusso di entropia attraverso la superficie; dalla legge di Fourier, quando la temperatura del fluido in V è inferiore a quella del fluido circostante si ha che il gradiente della temperatura è diretto secondo \mathbf{n} , il flusso di calore è entrante e conseguentemente si ha un aumento di entropia;
- IV la produzione di entropia legata ai gradienti di velocità;
- V la produzione di entropia legata ai gradienti di temperatura.

Utilizzando la relazione di Fourier si ha:

$$-q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = K \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} > 0 \quad (237)$$

quindi la produzione di entropia legata ai gradienti di temperatura è sempre positiva.

Per quanto riguarda la produzione di entropia legata ai gradienti di velocità risulta:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} (e_{ij} + r_{ij}) = (\lambda e_{kk} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}) e_{ij} \quad (238)$$

tenuto conto che è nullo il prodotto scalare tra un tensore simmetrico ed uno antisimmetrico. Posto $\lambda = -2/3\mu$ si ha:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 2\mu \left[e_{ij} e_{ij} - \frac{e_{kk} e_{mm}}{3} \right] \quad (239)$$

Poiché:

$$e_{ij} e_{ij} = e_{11}^2 + e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{21}^2 + e_{22}^2 + e_{23}^2 + e_{31}^2 + e_{32}^2 + e_{33}^2$$

$$e_{kk} e_{mm} = e_{11}^2 + e_{11} e_{22} + e_{11} e_{33} + e_{11} e_{22} + e_{22}^2 + e_{22} e_{33} + e_{11} e_{33} + e_{22} e_{33} + e_{33}^2$$

risulta:

$$\sigma_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 4\mu (e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2) + \frac{2}{3}\mu [(e_{11} - e_{22})^2 + (e_{22} - e_{33})^2 + (e_{11} - e_{33})^2] \quad (240)$$

Anche la produzione di entropia causata da gradienti di velocità è positiva. Quindi si può affermare che l'entropia di un sistema isolato, per il quale non si hanno scambi di calore e lavoro con l'esterno, è una funzione monotona crescente del tempo.

Ciò vuol dire che l'avere introdotto, nella forma vista, le equazioni costitutive che legano rispettivamente sforzi e flussi di calore alle velocità di deformazione e ai gradienti di temperatura è un modo alternativo di enunciare il secondo principio della termodinamica.

5. FLUSSI POTENZIALI

5.1. Equazione della vorticità

Cerchiamo un'equazione che ci permetta di analizzare l'evoluzione della vorticità, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, analogamente a quanto accade per l'accelerazione con l'equazione di Navier-Stokes. Riprendiamo innanzitutto l'espressione dell'accelerazione (211):

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla u^2 - \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} \quad (241)$$

e calcoliamone il rotore:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{u})}{\partial t} + \frac{1}{2} \underbrace{\nabla \times \nabla u^2}_{=0} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}). \quad (242)$$

Il secondo termine si annulla perché il rotore di un gradiente è sempre nullo. L'ultimo termine può essere sviluppato ricordando la formula del doppio prodotto vettoriale (209):

$$\begin{aligned} -[\nabla \times (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})]_i &= -\left[\frac{\partial(\mathbf{u}_i \boldsymbol{\omega}_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial(\mathbf{u}_j \boldsymbol{\omega}_i)}{\partial x_j} \right] = \\ &= -\mathbf{u}_i \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_j}{\partial x_j} - \boldsymbol{\omega}_j \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial x_j} + \mathbf{u}_j \frac{\partial \boldsymbol{\omega}_i}{\partial x_j} + \boldsymbol{\omega}_i \frac{\partial \mathbf{u}_j}{\partial x_j} = \\ &\left[-\underbrace{\mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})}_{=0} - (\nabla \mathbf{u}^t) \boldsymbol{\omega} + (\nabla \boldsymbol{\omega}^t) \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}) \right]_i \end{aligned} \quad (243)$$

in quanto la divergenza di un rotore è nulla. Sostituendolo nella precedente otteniamo:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{\omega}^t) \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u}^t) \boldsymbol{\omega} + (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega}; \quad (244)$$

dalla quale possiamo ricavare un'espressione cinematica per la variazione di vorticità:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\nabla \boldsymbol{\omega}^t) \mathbf{u} = \frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \nabla \times \mathbf{a} + (\nabla \mathbf{u}^t) \boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} \quad (245)$$

Il primo termine all'ultimo membro può essere ricavato dalle equazioni di Navier-Stokes scritte nel campo gravitazionale, nell'ipotesi di fluido barotropico:

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}^t) \mathbf{u} = -g \nabla h + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (246)$$

calcolandone il rotore e ricordando che il rotore di un gradiente è nullo, otteniamo:

$$\nabla \times \mathbf{a} = \nu \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}).$$

Essendo il laplaciano un operatore lineare, è possibile scambiarlo con il prodotto vettoriale e riscrivere il termine a secondo membro come:

$$\nabla \times (\nu \nabla^2 \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 (\nabla \times \mathbf{u}) = \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega},$$

e sostituendo al rotore dell'accelerazione l'espressione trovata in precedenza:

$$\boxed{\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\nabla \mathbf{u}^t) \boldsymbol{\omega} - (\nabla \cdot \mathbf{u}) \boldsymbol{\omega} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}} \quad (247)$$

che è la cercata *equazione della vorticità*. Tale equazione conserva la forma sopra scritta anche se il fluido è soggetto ad un campo di forze di massa diverso da quello gravitazionale, purché esso sia conservativo, in modo che il suo rotore sia nullo.

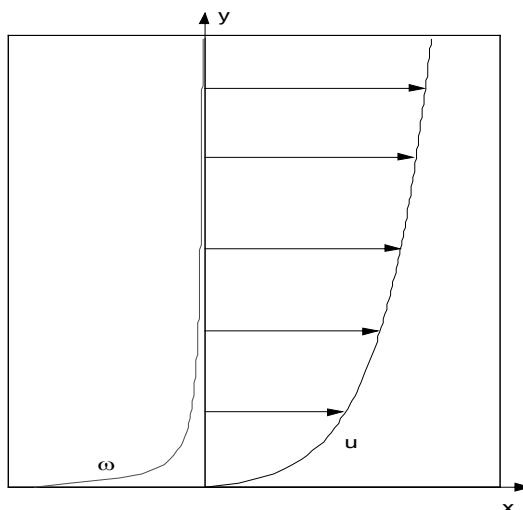


FIGURA 15

Consideriamo un moto che, ad un certo istante, sia *irrotazionale*, ovvero $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ in tutto il campo; in queste condizioni i primi due termini dell'equazione della vorticità si annullano. L'unico termine che può determinare una generazione di vorticità è quello legato alla viscosità. Questo è un termine *diffusivo*, che tende a far propagare la viscosità anche a porzioni di fluido inizialmente irrotazionali. Se prendiamo ad esempio un fluido, inizialmente a riposo, che lambisce una parete, esso sarà inizialmente irrotazionale, poi nascerà una vorticità in prossimità della parete a causa dei gradienti di velocità imposti dalla condizione di aderenza ($\omega_z = u_{y,x} - u_{x,y} = -u_{x,y}$ in Figura 15). Successivamente la vorticità verrà distribuita, per trasporto e diffusione, in tutto il campo. In assenza della viscosità verrebbe a mancare la condizione di aderenza ed i conseguenti gradienti di velocità con la vorticità loro associata. Il flusso rimarrebbe quindi irrotazionale. Si deduce quindi che il moto di un fluido barotropico, a viscosità trascurabile ($Re \gg 1$), e soggetto a forze di massa potenziali, che sia inizialmente irrotazionale, rimane irrotazionale.

5.2. Formulazione del problema

5.2.1. Moti irrotazionali

Si è già osservato che, nella maggior parte dei casi, il sistema di equazioni differenziali che caratterizza un problema fluidodinamico:

$$\begin{cases} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{3} \nu \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \end{cases}$$

non può essere risolto per via analitica; anche la soluzione per via numerica, per mezzo di elaboratori elettronici, presenta delle difficoltà spesso insormontabili a causa dell'onerosità dei calcoli e della non linearità delle equazioni di Navier-Stokes. Esiste però una classe di problemi caratterizzata da un sistema di equazioni considerevolmente più agevole da risolvere: i *flussi potenziali*. Questa classe di flussi è caratterizzata dall'ipotesi fondamentale che il flusso sia irrotazionale:

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Naturalmente l'assunzione di questa ipotesi che, da un punto di vista formale, è sufficiente a impostare il problema, non è invece sufficiente da un punto di vista fisico né tantomeno ingegneristico; per capire se essa sia applicabile nella risoluzione di un problema concreto, sarà necessario sapere sotto quali condizioni fisiche l'ipotesi ora formulata sia accettabile. L'irrotazionalità è un'ipotesi di carattere cinematico, quindi qualsiasi flusso di qualsiasi fluido può, in linea di principio, essere irrotazionale in qualche istante di tempo, ciò nondimeno, l'ipotesi è accettabile nell'affrontare un problema solo se il flusso *rimane* irrotazionale anche nel successivo sviluppo del fenomeno.

Affinché un flusso irrotazionale, e quindi potenziale, rimanga tale è necessario che siano verificate le condizioni individuate nel paragrafo precedente, ricordiamole:

- *effetti della viscosità trascurabili* ($Re \gg 1$): solo in questo caso infatti gli sforzi sono ovunque ortogonali alla superficie su cui agiscono; non possono quindi nascere azioni tangenziali che metterebbero in rotazione una particella fluida;
- *forze di massa dotate di potenziale*, quindi la risultante passa per il centro di massa (o baricentro) G;
- *fluido barotropico*, ovvero la densità ρ deve essere funzione solo della pressione p .

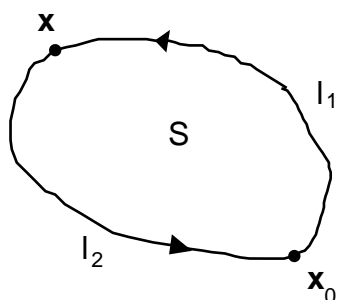


FIGURA 16

5.2.2. Potenziale

Consideriamo, nel dominio di studio, una linea orientata, l , che costituisce il bordo di una superficie S ed identifichiamo su tale linea due punti: \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x} (Figura 16). La circolazione lungo tale linea è:

$$\Gamma = \oint_l \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}; \quad (248)$$

esprimiamola per mezzo del teorema di Stokes:

$$\oint_l \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (249)$$

per l'ipotesi di irrotazionalità. L'integrale di linea può essere spezzato in due contributi, uno lungo la linea l_1 e l'altro lungo la linea l_2 :

$$0 = \int_{x_0, l_1}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{x, l_2}^{x_0} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x_0, l_1}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} - \int_{x_0, l_2}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (250)$$

quindi l'integrale calcolato lungo la linea l_1 è uguale a quello calcolato lungo la linea l_2 . Avendo però scelto il circuito, l , e quindi l_1 ed l_2 , in modo arbitrario, si può concludere che l'integrale $\int_{x_0}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$ è indipendente dal percorso scelto tra \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x} . In altre parole $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}$ è un differenziale esatto.

Pertanto, fissato \mathbf{x}_0 , possiamo definire la funzione:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{x_0}^x \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} \quad (251)$$

detta *potenziale del campo di velocità*. Tale funzione è legata al campo di velocità dalla relazione:

$$\boxed{\mathbf{u} = \nabla\varphi.} \quad (252)$$

5.2.3. Fluidi incomprimibili

Per poter sfruttare appieno i vantaggi che sono offerti da una trattazione del problema fluidodinamico in termini di potenziale, formuliamo l'ulteriore ipotesi, senz'altro accettabile nella maggior parte dei problemi di ambito idraulico, che la comprimibilità del fluido non giochi un ruolo significativo nel fenomeno che si sta studiando. Se quindi $\rho = \text{cost.}$ l'equazione di conservazione di bilancio della massa si riduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

la quale, espressa in termini di potenziale, diventa:

$$\boxed{\nabla \cdot (\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i \partial x_i} = 0.} \quad (253)$$

Questa, nota come *equazione di Laplace*, è una sola equazione in una sola incognita e può essere risolta indipendentemente dalle equazioni di Navier-Stokes, una volta che siano note le condizioni al contorno. In questo caso, dunque, possiamo risolvere prima il problema cinematico, attraverso

l'equazione di Laplace e, una volta noto il potenziale e quindi il campo di velocità, risolvere il problema dinamico attraverso le equazioni dell'energia meccanica.

Bisogna osservare infine che l'equazione (253) è un'equazione differenziale *lineare*: se φ_1 e φ_2 sono soluzioni, anche qualsiasi loro combinazione lineare, $\varphi = a \varphi_1 + b \varphi_2$, lo è. Quindi possiamo studiare una serie di soluzioni elementari le quali, combinate insieme, possono fornirci la soluzione di ampi insiemi di problemi.

5.2.4. Condizioni al contorno

In generale è possibile assegnare al contorno del dominio in cui scorre un fluido due tipi di condizioni:

- una condizione *dinamica*, la quale richiede che il fluido non scivoli sul contorno solido, e che quindi la velocità relativa tra contorno e fluido si annulli nella superficie di contatto (*aderenza*). Questa condizione tiene conto degli effetti della viscosità del fluido;
- una condizione *cinematica*, che richiede che il contorno non possa essere attraversato dal fluido, e che quindi la componente normale della velocità sia nulla sul contorno (*impermeabilità*).

Nel caso in esame, essendo l'equazione di Laplace puramente cinematica, anche le condizioni al contorno che potremo imporre, dovranno essere puramente cinematiche: utilizzeremo quindi la condizione di impermeabilità. L'equazione di Laplace è del secondo ordine: le condizioni al contorno imposte potranno essere due. Se consideriamo, ad esempio, il flusso attorno ad un corpo, si imporrà la condizione di impermeabilità sulla superficie del corpo e l'altra condizione sarà invece utilizzata per descrivere le caratteristiche del flusso infinitamente lontano dal corpo.

5.2.5. Equazione dell'energia meccanica

Per chiudere il problema dal punto di vista dinamico, conviene utilizzare l'equazione dell'energia meccanica che, sotto le ipotesi sopra enunciate e con forze di massa solo gravitazionali, diventa la (213). Se inoltre il problema è stazionario, avremo semplicemente:

$$\nabla H = 0.$$

Da questa, noto il campo di velocità, è possibile conoscere quello della pressione. Se si ha $F_r \gg 1$, e quindi le forze di massa sono trascurabili, il bilancio di energia meccanica si riduce a:

$$p + \frac{1}{2} \rho u^2 = \text{cost.} \quad (254)$$

5.3. Campi tridimensionali

5.3.1. Flusso uniforme

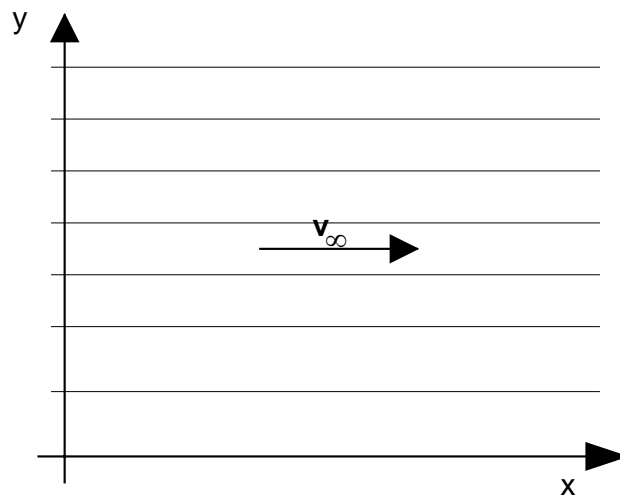


FIGURA 17

Consideriamo un flusso uniforme ed indichiamo con v_∞ la velocità del fluido indisturbato. Dato un sistema di assi cartesiani $\{x,y,z\}$ orientato in modo che l'asse x coincida con la direzione del flusso (Figura 17), il vettore \mathbf{u} sarà, ovviamente :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} v_\infty \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

e quindi:

$$\boxed{\varphi = v_\infty x} \quad (255)$$

la quale soddisfa in modo banale l'equazione di Laplace.

5.3.2. Sorgente o pozzo puntiforme

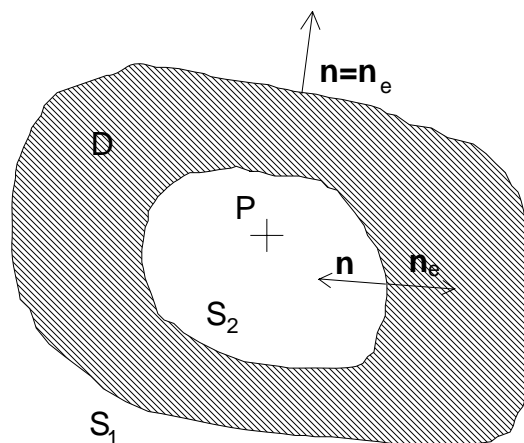


FIGURA 18

Inseriamo nel dominio di studio una sconnessione puntiforme, P, nella quale ammettiamo che l'equazione di continuità non sia verificata. Pur non essendo verificata in P, possiamo utilizzarla in tutto il resto dello spazio, ed in particolare nel dominio, D, che circonda il punto P (Figura 18):

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \Rightarrow 0 = \int_D \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{S_1+S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (256)$$

Gli integrali di superficie rappresentano il flusso volumetrico attraverso due superficie arbitrarie che contornano il punto P. Se scriviamo i due integrali utilizzando per entrambe le superficie la normale, \mathbf{n}_e , esterna rispetto a P, otteniamo:

$$\int_{S_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e dS = \int_{S_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e dS.$$

Essendo S_1 ed S_2 due superficie arbitrarie, possiamo affermare che il flusso attraverso una qualsiasi superficie chiusa che circonda P è lo stesso. Scegliamo allora questo flusso per caratterizzare la discontinuità ed indichiamolo con m. Per conoscere il campo di velocità, è conveniente scegliere una superficie sferica centrata in P (Figura 19). Ci si riconduce in questo modo ad un problema a simmetria sferica nel quale l'unica grandezza geometrica definita è la distanza, r, di P da un punto della superficie. Dovrà quindi risultare $\varphi = \varphi(r)$ e quindi:

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (257)$$

avendo usato le coordinate sferiche per esprimere il gradiente. Quindi \mathbf{u} deve essere parallelo ad \mathbf{r} : le linee di corrente son un fascio di rette che si intersecano in P. Inoltre, il modulo della velocità, u, non può che dipendere dalla sola r perché tutti i punti della superficie sferica sono equivalenti. Il flusso volumetrico risulta dunque:

$$m = \int_S \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_S u(r) dS = u_r(r) \cdot 4\pi r^2$$

dalla quale si ricava immediatamente l'espressione della componente radiale della velocità:

$$\boxed{u_r = \frac{m}{4\pi r^2}} \quad (258)$$

che è anche l'unica diversa da zero.

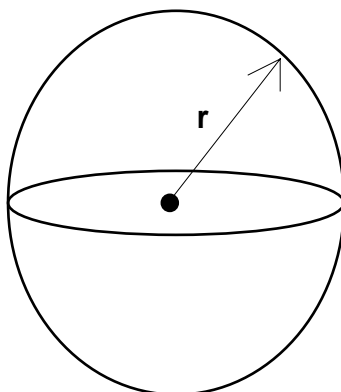


FIGURA 19

Integrando la precedente si ottiene il potenziale:

$$\varphi = -\frac{m}{4\pi r} \quad (259)$$

Dipendendo φ solo da r , le superficie equipotenziali sono un fascio di sfere centrate in P. Osserviamo infine che per $m > 0$ c'è un flusso volumetrico uscente dalle superficie che contornano P, quindi la discontinuità rappresenta una sorgente, mentre per $m < 0$, il flusso è entrante e la discontinuità rappresenta un pozzo.

5.3.3. Semicorpo

Si consideri il campo ottenuto dalla sovrapposizione di una corrente uniforme ed una sorgente; il potenziale è:

$$\varphi = v_{\infty} r \cos \theta - \frac{m}{4\pi r}$$

avendo scelto un sistema di coordinate sferiche $\{r, \theta, \phi\}$ come quello di Figura 20 si ottiene:

$$\begin{cases} u_r = v_{\infty} \cos \theta + \frac{m}{4\pi r^2}; \\ u_{\theta} = -v_{\infty} \sin \theta \\ u_{\phi} = 0 \end{cases} \quad (260)$$

Il campo simulato è quello di un semicorpo (Figura 20) che divide le linee di corrente provenienti dall'infinito da quelle che passano per l'origine ove è posta la sorgente.

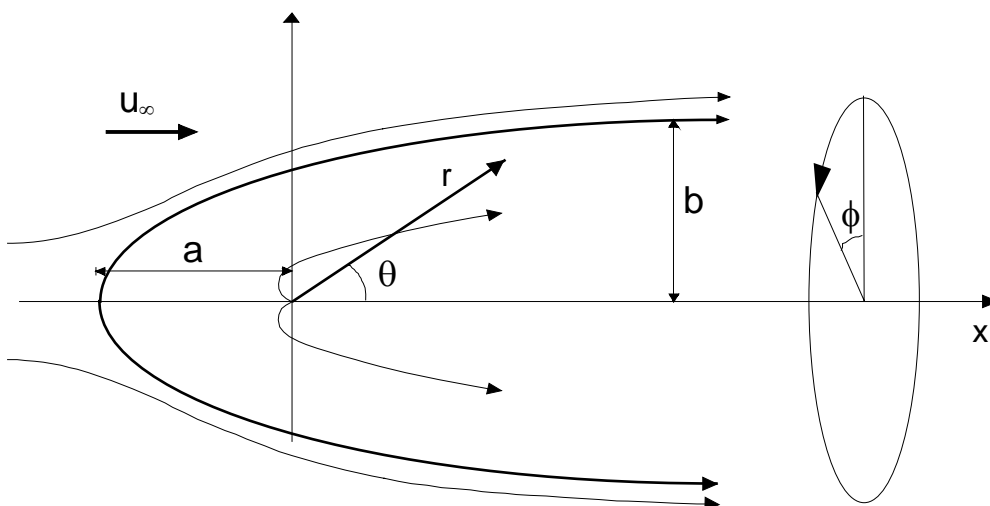


FIGURA 20

A conferma della simmetria rispetto l'asse x risulta $u_{\theta=0} = 0$ lungo l'asse di simmetria ($\theta = 0, \pi$). Definiti *punti di ristagno* i punti in cui la velocità è nulla; nel caso in esame si ha un solo punto di ristagno lungo l'asse x, per $\theta = \pi$, ad una distanza, a, dall'origine, ottenuta annullando la u_r :

$$a = \sqrt{\frac{m}{4\pi u_{\infty}}}$$

Il raggio b della sezione trasversale del semicorpo, per x tendente all'infinito, si ottiene eguagliando la portata emessa dalla sorgente con quella che attraversa tale sezione dove la velocità è uniforme e pari a u_{∞} :

$$m = \pi b^2 u_{\infty} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{m}{\pi u_{\infty}}} = 2a$$

A parità di u_{∞} il semicorpo aumenta le sue dimensioni all'aumentare dell'intensità della sorgente. A parità dell'intensità della sorgente le dimensioni del corpo diminuiscono all'aumentare della u_{∞} .

5.3.4. Corpo chiuso

Se si sovrappone ad una corrente uniforme una sorgente, S, ed un pozzo, P, di eguale intensità, posti ad una distanza d, si simula un flusso attorno ad un corpo chiuso. Con riferimento alla Figura 21, si ottiene:

$$\phi = u_{\infty} x_1 - \frac{m}{4\pi r_s} + \frac{m}{4\pi r_p} \tag{261}$$

dove:

$$\begin{cases} r_s = \sqrt{\left(x_1 + \frac{d}{2}\right)^2 + x_2^2} \\ r_p = \sqrt{\left(x_1 - \frac{d}{2}\right)^2 + x_2^2} \end{cases} \tag{262}$$

sostituendo le espressioni di r_s ed r_p e calcolando il gradiente si ottiene la velocità:

$$u_1 = u_\infty + \frac{m(x_1 + d/2)}{4\pi r_s^3} - \frac{m(x_1 - d/2)}{4\pi r_p^3} \quad ; \quad u_2 = \frac{mx_2}{4\pi r_s^3} - \frac{mx_2}{4\pi r_p^3}$$

In generale si simula un corpo chiuso utilizzando pozzi e sorgenti tali che abbiano somma algebrica delle intensità eguale a zero. Si simula un corpo aperto se tale somma è diversa da zero, la dimensione, b , di tale semicorpo all'infinito è data da (essendo N il numero di pozzi e sorgenti):

$$b = \sqrt{\sum_{i=1}^N m_i / \pi u_\infty}$$

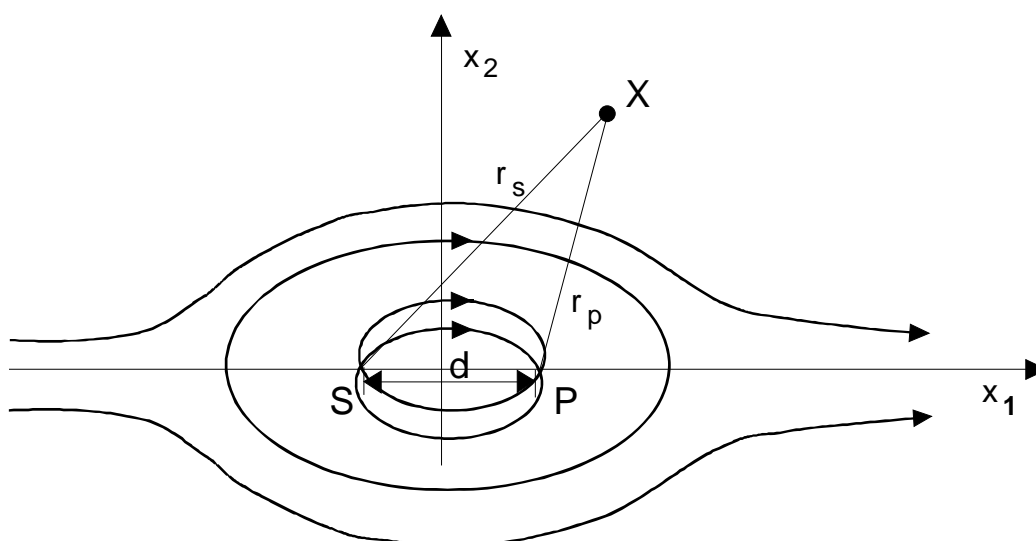


FIGURA 21

5.3.5. Problema inverso

È stata descritta, nel paragrafo precedente, la risoluzione di un problema nel quale era data la distribuzione di pozzi e sorgenti che simulano un corpo investito da un flusso uniforme v_∞ . Affrontiamo ora il cosiddetto *problema inverso*, nel quale si cerca la distribuzione di pozzi e sorgenti che simuli un corpo chiuso di forma nota. A questo scopo vanno scelti innanzitutto il numero, N , di pozzi e sorgenti che si vuole utilizzare ed i punti, x_i , nei quali si pongono tali singolarità. Maggiore è il numero di singolarità utilizzate e maggiore è l'approssimazione con la quale si approssima il corpo. Le posizioni di tali singolarità sono invece scelte in base alla forma ed alle caratteristiche di simmetria del corpo che si vuole simulare, con la condizione che siano senz'altro tutte interne ad esso. Avremo dunque, con riferimento alla Figura 22:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^N \varphi_i = \sum_{i=1}^N -\frac{m_i}{4\pi r_i} + v_\infty x_1 \\ \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{4\pi r_i^3} \mathbf{r}_i + \mathbf{v}_\infty \end{aligned} \quad (263)$$

Dobbiamo porre N condizioni per determinare le intensità m_i : la prima impone che il corpo sia chiuso:

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0; \quad (264)$$

le rimanenti (N-1) possono essere utilizzate per imporre che la velocità sia tangente al corpo in altrettanti punti, x_j' :

$$\mathbf{v}(x_j') \cdot \mathbf{n} = 0 \quad j=1, \dots, N-1 \quad (265)$$

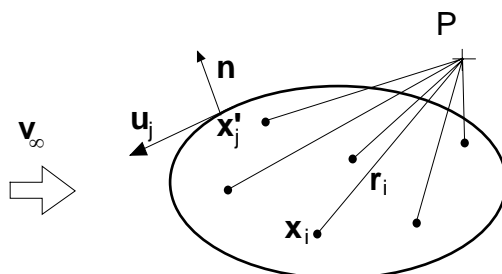


FIGURA 22

L'insieme delle condizioni forma un sistema lineare di N equazioni nelle N incognite, m_i , che una volta risolto permette di determinare l'intero campo di velocità intorno al corpo. Vale la pena di notare che, mentre le condizioni al contorno sul corpo sono imposte nella determinazione delle m_i , le condizioni al contorno all'infinito sono automaticamente soddisfatte in quanto al limite per $r_i \rightarrow \infty$ tutti i contributi alla velocità indotti da pozzi e sorgenti tendono a zero, quindi $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{v}_\infty$.

5.3.6. Paradosso di D'Alambert

Il paradosso di D'Alambert afferma che la risultante delle azioni dinamiche che un flusso uniforme di un fluido incomprimibile e non viscoso, in condizioni stazionarie e con forze di massa nulle, esercita su di un corpo è nulla.

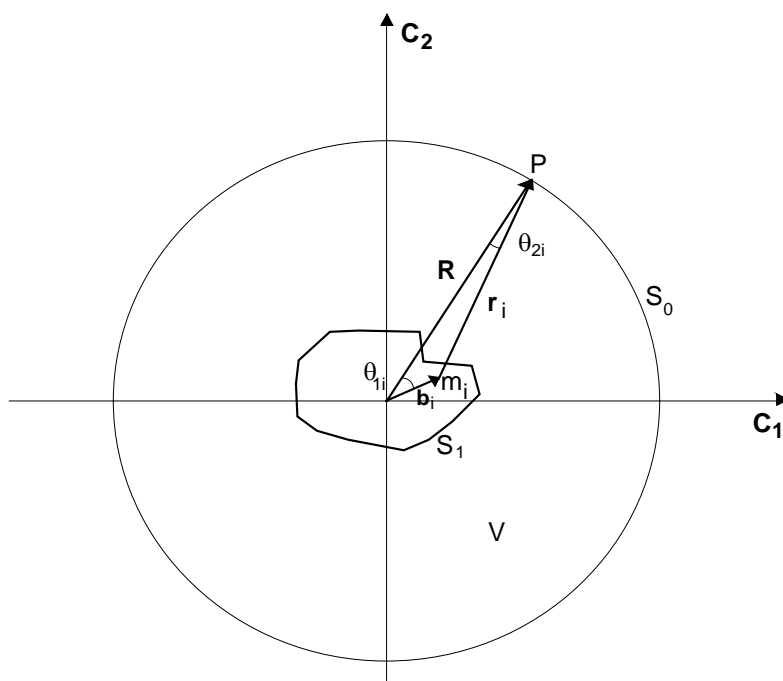


FIGURA 23

Un corpo chiuso, delimitato dalla superficie S , può essere simulato da un insieme di N sorgenti e pozzi posti al suo interno, di intensità m_i ed in un sistema di assi di riferimento con origine nel centro di figura del corpo, individuati dal vettore posizione \mathbf{b}_i (Figura 23). Poiché il corpo è chiuso, risulta:

$$\sum_{i=1}^N m_i = 0 \quad (266)$$

Il campo è studiato sovrapponendo il potenziale della corrente uniforme con quello delle singole sorgenti:

$$\varphi = \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{x} - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{4\pi r_i} \quad (267)$$

quindi:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_\infty + \mathbf{w} = \mathbf{u}_\infty + \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i = \mathbf{u}_\infty + \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{4\pi r_i^3} \mathbf{r}_i \quad (268)$$

essendo \mathbf{w}_i le velocità prodotte dalle singole sorgenti la cui somma è \mathbf{w} .

Si consideri una sfera di raggio R molto maggiore delle dimensioni caratteristiche del corpo:

$$b_i \ll R,$$

applicando l'equazione globale di bilancio della quantità di moto al fluido contenuto dal volume, V , compreso tra la superficie, S_1 , del corpo e la sfera di raggio R_0 e superficie S_0 , si ha:

$$\mathbf{M} = \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}_1 \quad (269)$$

essendo \mathbf{F}_0 la forza esercitata attraverso la superficie della sfera, ed \mathbf{F}_1 quella attraverso la superficie del corpo ed avendo tenuto conto che $\mathbf{G} = \mathbf{0}$ perché le forze di massa sono ipotizzate trascurabili, ed $\mathbf{I} = \mathbf{0}$ perché il problema è stazionario. Il flusso di quantità di moto è dato da:

$$\mathbf{M} = \int_{S_0} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_1} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS \quad (270)$$

il secondo termine è nullo in quanto la velocità risulta tangente al corpo; nel primo termine, invece, si può separare il contributo della corrente uniforme da quello della corrente dovuto alla presenza di pozzi e sorgenti:

$$\begin{aligned} \int_{S_0} (\rho \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS &= \rho \mathbf{u}_\infty \int_{S_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_0} \rho \mathbf{w} [(\mathbf{u}_\infty + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{n}] dS = \\ &= \underbrace{\int_{S_0} \rho \mathbf{w} (\mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{n}) dS}_A + \underbrace{\int_{S_0} \rho \mathbf{w} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) dS}_B \end{aligned} \quad (271)$$

Il primo termine a secondo membro è nullo in quanto rappresenta il flusso volumetrico di un fluido incompressibile attraverso una superficie chiusa.

Valutiamo ora l'ordine di grandezza degli integrali A e B al tendere di $R \rightarrow \infty$. Osserviamo innanzitutto che, essendo S_0 proporzionale a R^2 , il termine A è proporzionale a $(w R^2)$, mentre il termine B è proporzionale a $(w^2 R^2)$.

L'ordine di grandezza di w al tendere di $R \rightarrow \infty$ può essere stimato tenendo conto che:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \mathbf{w}_i = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{4\pi r_i^3} \mathbf{r}_i$$

ma, $\mathbf{r}_i = \mathbf{R} - \mathbf{b}_i$, quindi:

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{4\pi} \frac{\mathbf{R} - \mathbf{b}_i}{r_i^3};$$

inoltre:

$$R = b_i \cos\theta_{1i} + r_i \cos\theta_{2i}$$

ovvero:

$$r_i = \frac{R - b_i \cos\theta_{1i}}{\cos\theta_{2i}}$$

Al limite per $R \rightarrow \infty$ l'angolo $\theta_{2i} \rightarrow 0$ quindi:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{r_i}{R} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R - b_i \cos\theta_{1i}}{R \cos\theta_{2i}} = 1$$

quindi $r_i \rightarrow R$. Sempre per lo stesso limite, la velocità indotta dalle discontinuità diventa:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{w} = \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{4\pi} \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{4\pi} \frac{\mathbf{b}_i}{R^3} \propto \frac{1}{R^3},$$

nella quale il primo termine a secondo membro si annulla perché $\sum m_i = 0$, mentre il secondo è inversamente proporzionale ad R^3 . In conclusione si può affermare che, al tendere di $R \rightarrow \infty$, il termine A è proporzionale a R^{-1} , e il termine B è proporzionale a R^{-4} e quindi entrambi gli integrali tendono a zero. Abbiamo così dimostrato che il primo membro della (269) tende a zero al tendere di R all'infinito.

Le forze esterne sulla sfera di raggio R sono esprimibili, in assenza di sforzi viscosi, per mezzo dell'equazione dell'energia (254) come:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_0 &= \int_{S_0} -p \mathbf{n} dC = \int_{S_0} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 - k \right) \mathbf{n} dS = \frac{1}{2} \rho \int_{S_0} u^2 \mathbf{n} dS = \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_{S_0} \left(u_\infty^2 + 2 \mathbf{u}_\infty \cdot \mathbf{w} + w^2 \right) \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

Nell'ultimo integrale il primo termine dà contributo nullo perché rappresenta la risultante di una pressione costante applicata su tutta la superficie del corpo, il secondo è proporzionale ad R^{-3} e

quindi il suo integrale è proporzionale ad R^{-1} , mentre il terzo ad R^{-6} e quindi integrato è proporzionale ad R^{-4} . Si può quindi concludere che:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \mathbf{F}_0 = \mathbf{0}$$

Riprendendo infine l'equazione (269), abbiamo dimostrato che tutti i termini, tranne \mathbf{F}_1 tendono a zero al tendere di R all'infinito. Si può dunque concludere che anche $\mathbf{F}_1 \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$. Poiché \mathbf{F}_1 rappresenta l'azione che il fluido subisce dal corpo, resta dimostrato che anche la forza che il fluido esercita sul corpo è nulla non potendo essa dipendere dal raggio R .

5.4. Campi bidimensionali

5.4.1. Funzione di corrente

Nel caso di campi bidimensionali è possibile definire, a partire dall'ipotesi di incomprimibilità, una seconda funzione che caratterizza un flusso potenziale. Consideriamo un flusso nel quale nessuna grandezza dipenda da una delle variabili spaziali, per esempio la coordinata z . Non dipendendo nulla da z , il campo di moto su ogni piano ortogonale a questo asse è uguale agli altri. Possiamo quindi studiare il fenomeno su uno solo di questi piani. Dotiamo inoltre il piano di un verso positivo per gli angoli.

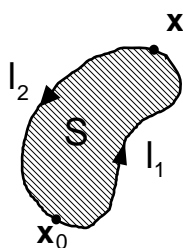


FIGURA 24

Consideriamo quindi una linea chiusa orientata l , e due punti, \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x} , su di essa (Figura 24). Grazie all'ipotesi di incomprimibilità ed al teorema di Green possiamo scrivere:

$$0 = \int_S \nabla \cdot \mathbf{u} dS = \oint_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

e spezzando l'integrale in due parti:

$$0 = \oint_l \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{x_0, l_1}^x \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{x, l_2}^{x_0} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$$

la quale può anche essere riscritta come:

$$\int_{x_0, l_1}^x \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{x_0, l_2}^x \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds,$$

che stabilisce che il flusso (per unità di lunghezza lungo l'asse z) attraverso una linea l dipende solo dagli estremi e non dalla forma della linea stessa. Inoltre, essendo l'integrale indipendente dal

percorso seguito, il differenziale $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds$ è esatto. Fissato \mathbf{x}_0 una volta per tutte, possiamo definire la *funzione di corrente*, come:

$$\boxed{\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds} \quad (272)$$

La funzione di corrente assume questo nome in quanto gode della proprietà di essere costante sulle linee di corrente; per dimostrarlo consideriamo le due linee di corrente che passano per i punti \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x}_1 , e calcoliamo la funzione di corrente in un generico punto, \mathbf{x} , sulla linea di corrente che passa per \mathbf{x}_1 (Figura 25). Spezziamo l'integrale in due parti: la prima tra \mathbf{x}_0 ed \mathbf{x}_1 , la seconda tra \mathbf{x}_1 ed \mathbf{x} ,

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{\mathbf{x}_0}^{\mathbf{x}_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{\mathbf{x}_1}^{\mathbf{x}} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \psi(\mathbf{x}_1),$$

il primo integrale coincide con la $\psi(\mathbf{x}_1)$ mentre l'integrale calcolato lungo la linea di corrente, tra \mathbf{x}_1 ed \mathbf{x} , dà contributo nullo poiché, essendo la velocità sempre tangente alla linea, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

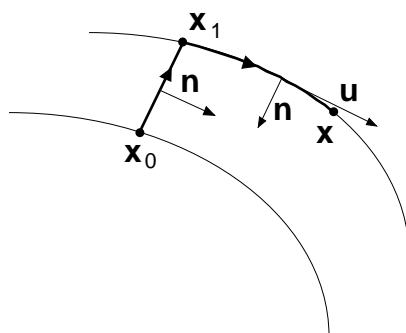


FIGURA 25

Osserviamo inoltre che, come lemma di questo ragionamento, possiamo affermare che il flusso attraverso qualsiasi sezione individuata dalle stesse due linee di corrente è costante.

Calcoliamo infine la relazione che sussiste tra funzione di corrente e velocità: calcoliamo il flusso totale attraverso il circuito infinitesimo di Figura 26 che, per l'incompressibilità, dovrà essere nullo:

$$0 = \int_S \nabla \cdot \mathbf{u} dS = -u_y dx + u_x dy - d\psi,$$

ovvero:

$$d\psi = -u_y dx + u_x dy$$

ma, essendo ψ un differenziale esatto, $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$, possiamo scrivere:

$$\boxed{\begin{cases} u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases}} \quad (273)$$

che sono le relazioni cercate. Confrontando queste relazioni con quelle che legano il potenziale alla velocità, si può facilmente ricavare che $\nabla\psi \cdot \nabla\phi = 0$, di conseguenza anche le linee iso-potenziale sono ortogonali alle linee di corrente.

Per esprimere le stesse relazioni in coordinate polari è sufficiente fare riferimento all'espressione del gradiente in tale sistema di coordinate. Avremo infatti:

$$\begin{cases} u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (274)$$

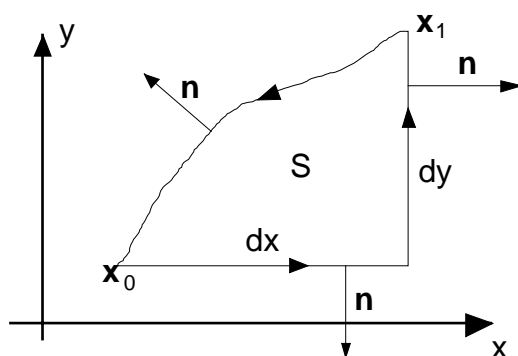


FIGURA 26

5.4.2. Sorgente lineare

Consideriamo il campo di velocità generato da una sorgente lineare distribuita lungo una retta. Supponiamo che esista nel dominio di studio una retta, S, sulla quale l'equazione di continuità, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, non sia rispettata. Per le ipotesi che abbiamo fatto all'inizio dovremo considerare questa retta come una sconnessione del nostro dominio ed escluderla quindi dalla zona di studio. In questo caso ci si trova ad avere a che fare con un problema a simmetria assiale: un osservatore che si trova in un generico punto, P, dello spazio può costruire una unica entità geometrica: la distanza, r, tra la retta ed il punto P.

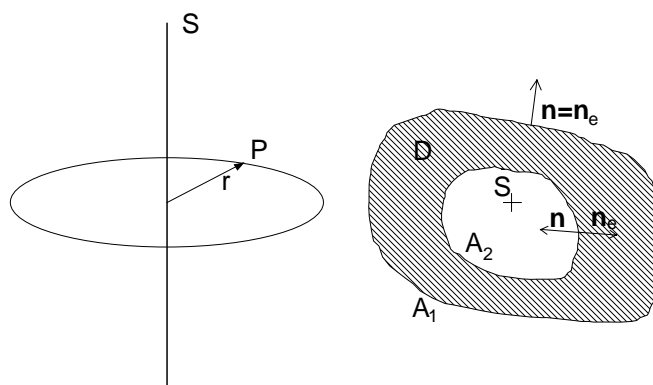


FIGURA 27

Indicato il raggio vettore che collega la retta al generico punto P con \mathbf{r} , il potenziale potrà essere solo funzione del modulo di r: $\phi = \phi(r)$. Quindi il campo di velocità, espresso in coordinate cilindriche avrà la forma:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial\phi/\partial r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Per studiare il campo di moto è sufficiente considerare la generica sezione ortogonale alla retta S. Infatti, essendo la sorgente uniforme per tutta la sua lunghezza nulla varia tra le diverse sezioni di S ed il campo di velocità è sempre contenuto nelle sezioni ortogonali. Ci possiamo quindi ricondurre ad un caso bidimensionale. Analogamente a quanto fatto per la sorgente puntiforme possiamo applicare il teorema di Green in un dominio, D, che circondi la sorgente S, e sia delimitato da 2 linee l_1 e l_2 :

$$0 = \int_D \nabla \cdot \mathbf{u} dA = \int_{l_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds + \int_{l_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} ds = \int_{l_1} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e ds - \int_{l_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_e ds$$

si conclude che, anche in questo caso, il flusso calcolato attraverso una qualsiasi linea che circonda S è lo stesso. Indichiamo il flusso volumetrico per unità di lunghezza della sorgente con m e calcoliamolo su di una circonferenza di raggio r:

$$m = \oint \mathbf{u}(r) \cdot \mathbf{n} ds = 2\pi r u(r), \quad (275)$$

da cui si ricava il campo di velocità:

$$\boxed{\begin{matrix} u_r(r) = \frac{m}{2\pi r} \\ u_\theta = u_z = 0 \end{matrix}} \quad (276)$$

Le linee di corrente sono quindi un fascio di rette che passa per l'origine (Figura 28).

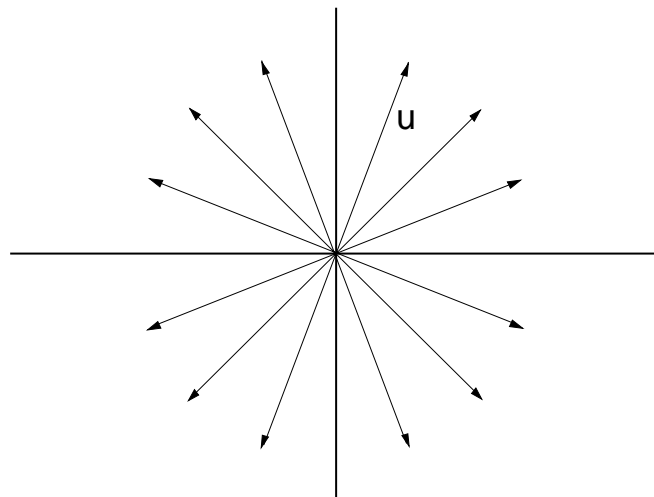


FIGURA 28

Ricordando l'espressione del gradiente in coordinate polari, $\mathbf{u} = \nabla\phi$ diventa:

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \end{cases} \quad (277)$$

Il potenziale si ottiene integrando la prima delle (277):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = u_r(r) = \frac{m}{2\pi r} \Rightarrow \varphi = \frac{m}{2\pi} \ln(r) + k(\theta, z)$$

e dovendo essere funzione della sola r si può concludere che:

$$\boxed{\varphi = \frac{m}{2\pi} \ln(r)}. \quad (278)$$

La funzione di corrente invece, richiedendo la definizione di un verso positivo degli angoli, può essere anche funzione di θ . Integrando la prima delle (274):

$$u_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{m}{2\pi r},$$

si ottiene:

$$\boxed{\psi = \frac{m}{2\pi} \theta} \quad (279)$$

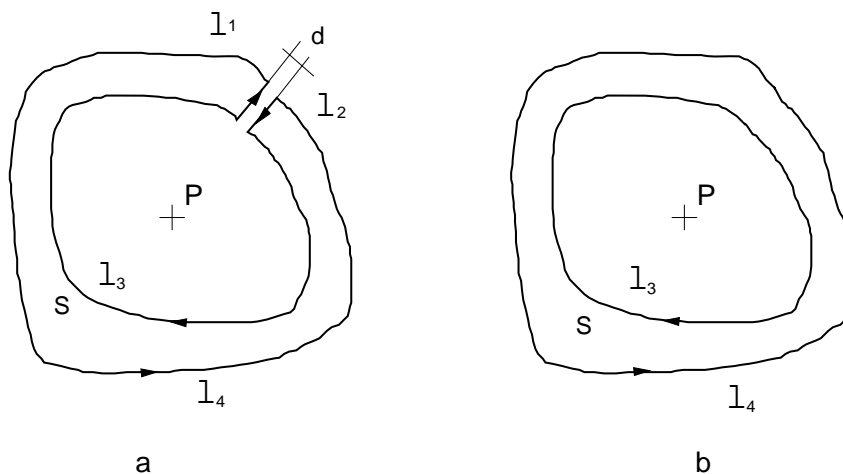


FIGURA 29

5.4.3. Vortice

Si consideri un dominio bidimensionale dotato di un verso positivo degli angoli θ , che è lo stesso, di una regola della mano destra e si introduca in esso una sconnessione, P, nella quale si ammette che $\omega \neq 0$. Calcoliamo su di una linea l come quella rappresentata in Figura 29a la circolazione:

$$\oint_l \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{l_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{l_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{l_3} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_{l_4} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (280)$$

essendo nulla la vorticità in ogni punto del dominio S. Se ora facciamo tendere a zero la distanza d tra i segmenti l_1 ed l_2 , gli integrali su questi due segmenti danno contributi uguali ed opposti e dunque si elidono. Rimangono gli altri due integrali, la cui somma è nulla (Figura 29b):

$$\oint_{l_3} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \oint_{l_4} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = -\Gamma_3 + \Gamma_4$$

avendo indicato con Γ_3 e Γ_4 la circolazione, calcolata in senso antiorario, rispettivamente sulle linee l_3 ed l_4 . Le due linee sono state scelte in modo arbitrario, quindi si può concludere che la circolazione su qualsiasi linea che circonda la sconnessione P è la stessa: la circolazione è una caratteristica propria della sconnessione. Calcoliamola dunque su di una circonferenza, imponendo un campo di velocità dipendente solo da r (problema a simmetria cilindrica):

$$\Gamma = \oint \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r u_\theta(r)$$

da cui,

$$\boxed{u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r}} \quad (281)$$

inoltre, dovendo il flusso di massa essere nullo attorno a P $u_r(r)=0$. Il potenziale si ottiene ancora una volta per integrazione della seconda delle (277).

$$\boxed{\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta} \quad (282)$$

Analogamente, la seconda delle (274), integrata fornisce:

$$\boxed{\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r)} \quad (283)$$

Le linee di corrente sono quindi circonferenze centrate nell'origine ($\psi = \text{cost.} \Rightarrow r = \text{cost.}$) ed il modulo della velocità cresce indefinitamente man mano che ci si avvicina ad essa (Figura 30).

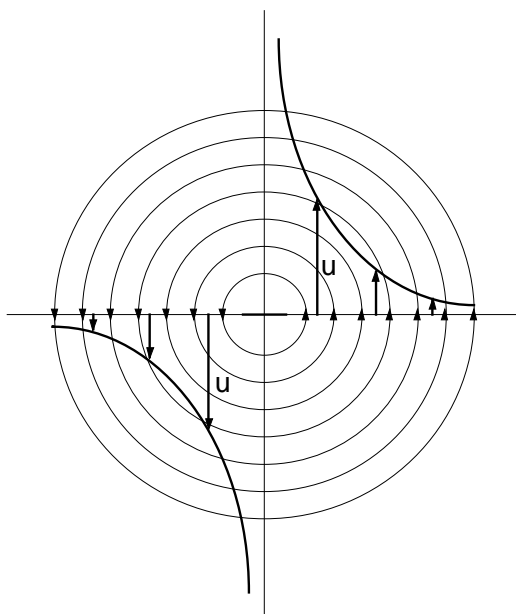


FIGURA 30

5.4.4. Doppietta

Siano dati una sorgente ed un pozzo di pari intensità, m , posti, rispettivamente, nell'origine e ad una distanza δ dall'origine lungo l'asse x (Figura 31). Il potenziale del campo di velocità può essere ottenuto grazie al principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\varphi = \varphi_s + \varphi_p = \frac{m}{2\pi} \ln(r) - \frac{m}{2\pi} \ln(r').$$

Se definiamo la funzione $F(\delta) = \frac{m}{2\pi} \ln(r'(\delta))$, possiamo scrivere i due potenziali di sorgente e pozzo come $\varphi_s = F(0)$ e $\varphi_p = -F(\delta)$, infatti $r' = \sqrt{(x - \delta)^2 + y^2}$ e $r = r'(0) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Definiamo inoltre *momento* della coppia sorgente-pozzo il prodotto $M = m \delta$.

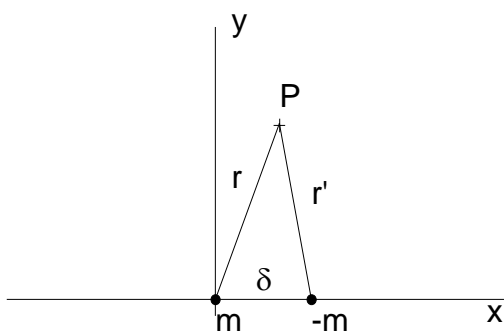


FIGURA 31

La doppietta è definita come il limite per $\delta \rightarrow 0$ della coppia sorgente-pozzo, con la condizione che il suo momento, M , venga mantenuto costante:

$$\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} [\varphi_s + \varphi_p]_{M=\text{cost.}} \quad (284)$$

Per calcolare questo limite, esprimiamo il potenziale del pozzo per mezzo di uno sviluppo in serie di Taylor al prim'ordine:

$$\begin{aligned}\varphi_p &= -F(\delta) = -F(0) - \left. \frac{\partial F}{\partial r'} \frac{\partial r'}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} \delta + \dots = -\frac{m}{2\pi} \ln(r) - \left. \frac{m}{2\pi r'} \frac{(\delta - x)}{r'} \right|_{\delta=0} \delta + \dots = \\ &= -\frac{m}{2\pi} \ln(r) + \frac{m\delta}{2\pi r} x + \dots\end{aligned}$$

e sostituiamo:

$$\varphi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[F(0) + \left(-F(0) + \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2} \right) \right]_{M=\text{cost.}},$$

ottenendo infine:

$$\boxed{\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{r^2} = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r}} \quad (285)$$

Da quest'ultima si ricava l'espressione della velocità:

$$\left\{ \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r^2} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r^2} \end{aligned} \right. \quad (286)$$

ed infine, attraverso una delle (274) si ricava l'espressione della funzione di corrente:

$$\boxed{\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r}} \quad (287)$$

Le linee di corrente si ottengono ponendo $\psi = k = \text{cost.}$:

$$\psi = -\frac{M}{2\pi r} \sin \theta = k$$

e moltiplicando per r^2 e dividendo per k si ha:

$$r^2 + \frac{M}{2\pi k} r \sin \theta = 0$$

ovvero:

$$x^2 + y^2 + \frac{M}{2\pi k} y = 0 \quad (288)$$

la quale rappresenta un fascio di circonferenze che passano per l'origine e con il centro sull'asse delle y (Figura 32).

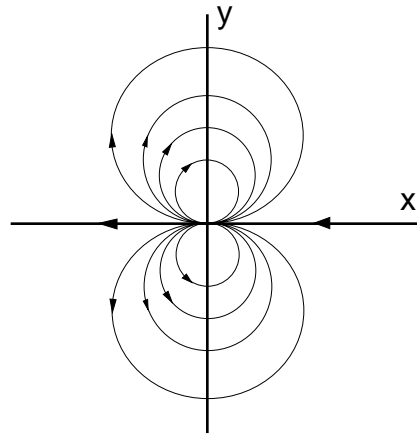


FIGURA 32

5.4.5. Cilindro investito da un flusso uniforme

Il flusso attorno ad un cilindro, di raggio R , investito da una corrente uniforme, v_∞ , si ottiene sommando una doppietta ed una corrente uniforme. Per dimostrare questo fatto dobbiamo verificare che l'equazione di Laplace sia soddisfatta e che lo siano anche le condizioni al contorno che saranno di impermeabilità sul cilindro e di corrente indisturbata all'infinito. Il primo requisito è soddisfatto in modo banale essendo l'equazione di Laplace lineare, quindi la somma di due funzioni che soddisfano l'equazione di Laplace soddisfa a sua volta questa equazione. Per verificare le condizioni al contorno sul cilindro esaminiamo la funzione di corrente:

$$\psi = \psi_u + \psi_d = v_\infty y - \frac{M}{2\pi r} \text{sen } \theta = v_\infty \left(r - \frac{M}{2\pi v_\infty r} \right) \text{sen } \theta$$

che, se definiamo $R^2 = \frac{M}{2\pi v_\infty}$, diventa:

$$\boxed{\psi = v_\infty \left(r - \frac{R^2}{r} \right) \text{sen } \theta = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) y} \quad (289)$$

È facile osservare che per $r=R$ la funzione di corrente è costante ($\Psi=0$), quindi la circonferenza di raggio R è una linea di corrente: il campo di velocità così generato soddisfa quindi la condizione di impermeabilità su di un cilindro di raggio R . Calcoliamo il potenziale ed il campo di velocità:

$$\boxed{\varphi = \varphi_u + \varphi_d = v_\infty x + \frac{M}{2\pi r} \cos \theta = v_\infty \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \theta = v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) x} \quad (290)$$

$$\boxed{\begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \text{sen } \theta \end{cases}} \quad (291)$$

Al limite per $r \rightarrow \infty$ il contributo della doppietta tende a zero e la velocità tende a quella del flusso indisturbata, come richiede la condizione al contorno all'infinito. In conclusione, sia l'equazione differenziale che le condizioni al contorno sono soddisfatte, quindi la sovrapposizione di un flusso

uniforme e di una doppietta rappresenta effettivamente un cilindro di raggio R investito da una corrente uniforme.

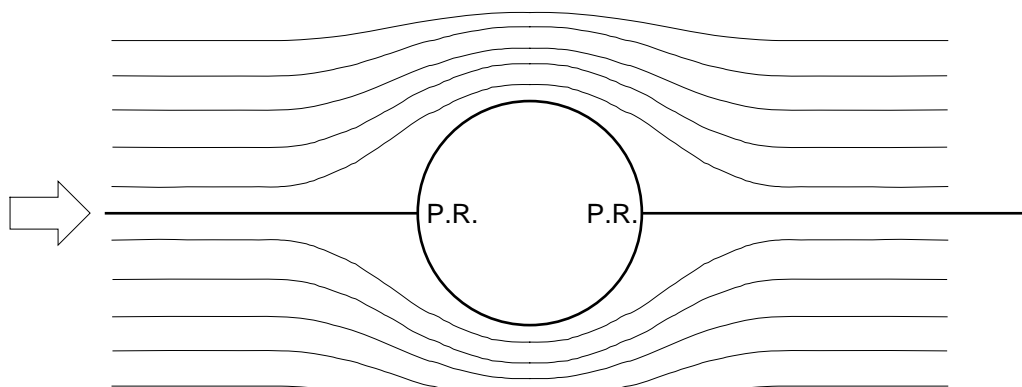


FIGURA 33

È interessante studiare le condizioni sulla superficie del cilindro, la velocità è:

$$\begin{cases} u_r(R) = 0 \\ u_\theta(R) = -2v_\infty \sin \theta \end{cases} \quad (292)$$

Quindi ci sono 2 punti nei quali la velocità si annulla (*punti di ristagno*), entrambi sull'asse delle x . La velocità assume invece il suo valore massimo in corrispondenza di $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3/2\pi$, punti nei quali assume un valore doppio di quello del flusso indisturbato.

La distribuzione delle pressioni può essere ricavata dall'equazione dell'energia meccanica scritta per $F_r \gg 1$ ((254)):

$$p + \frac{1}{2}\rho u^2 = p_\infty + \frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \quad (293)$$

nella quale la pressione del fluido indisturbato deve essere nota. Sul cilindro la pressione sarà dunque massima nei punti di ristagno, mentre assumerà il suo valore minimo in corrispondenza dei punti nei quali la velocità è massima. L'andamento delle pressioni può anche essere descritto per mezzo di un coefficiente adimensionale, detto *coefficiente di pressione*, che si ottiene adimensionalizzando la variazione di pressione rispetto al flusso indisturbato per mezzo dell'energia cinetica del flusso indisturbato (la cosiddetta *pressione dinamica*):

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{1/2\rho v_\infty^2} = 1 - \left(\frac{u}{v_\infty}\right)^2 \quad (294)$$

Questo coefficiente, che è definito nell'intervallo $]-\infty; 1]$, si annulla quando la pressione coincide con quella indisturbata, è negativo nelle zone di depressione, mentre assume valori positivi nelle zone di sovrappressione. Sul cilindro avremo (Figura 34):

$$c_p = 1 - 4 \sin^2 \theta \quad (295)$$

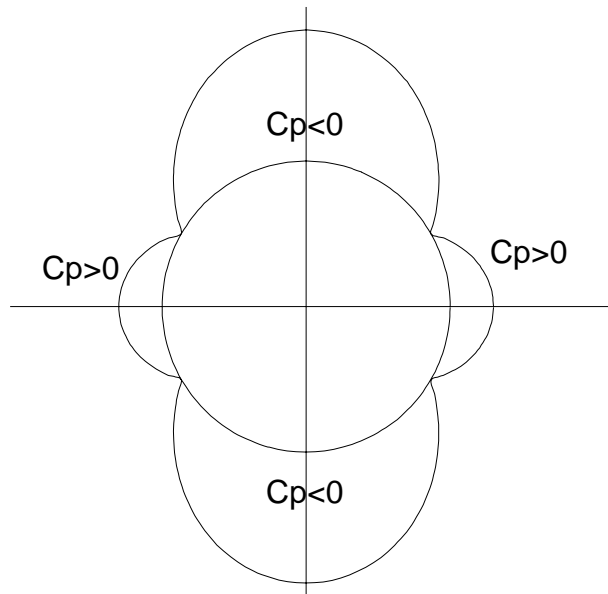


FIGURA 34

5.4.6. Cilindro con circolazione

Aggiungiamo al campo studiato nel paragrafo precedente un vortice con circolazione $-\Gamma$ (circolazione oraria) centrato nell'origine. Possiamo immaginare che questa circolazione sia generata, attraverso la viscosità, dalla rotazione del cilindro intorno al suo asse. In questa schematizzazione naturalmente la viscosità non può essere introdotta, possiamo però immaginare di rappresentarne globalmente gli effetti, introducendo un vortice elementare. Il potenziale e la funzione di corrente saranno quindi:

$$\begin{cases} \varphi = \varphi_u + \varphi_d + \varphi_v = v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) x - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \\ \psi = \psi_u + \psi_d + \psi_v = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) y + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(r) \end{cases} \quad (296)$$

mentre il campo di velocità risulta:

$$\begin{cases} u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = v_\infty \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta \\ u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -v_\infty \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi r} \end{cases} \quad (297)$$

La circonferenza data da $r = R$ è ancora una linea di corrente, e l'effetto del vortice tende a zero quando $r \rightarrow \infty$, dunque le condizioni al contorno sono ancora soddisfatte.

Sul cilindro la velocità è:

$$\begin{cases} u_r(R) = 0 \\ u_\theta(R) = -2v_\infty \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi R} \end{cases} \quad (298)$$

I punti di ristagno si ottengono imponendo $u_\theta = 0$, da cui:

$$\text{sen } \theta = -\frac{\Gamma}{4\pi R v_\infty} \quad (299)$$

Questa equazione ha 2 soluzioni se $\Gamma < (4 \pi R v_\infty)$ (Figura 35), ne ha una sola se $\Gamma = (4 \pi R v_\infty)$, mentre non ne ha nessuna se $\Gamma > (4 \pi R v_\infty)$.

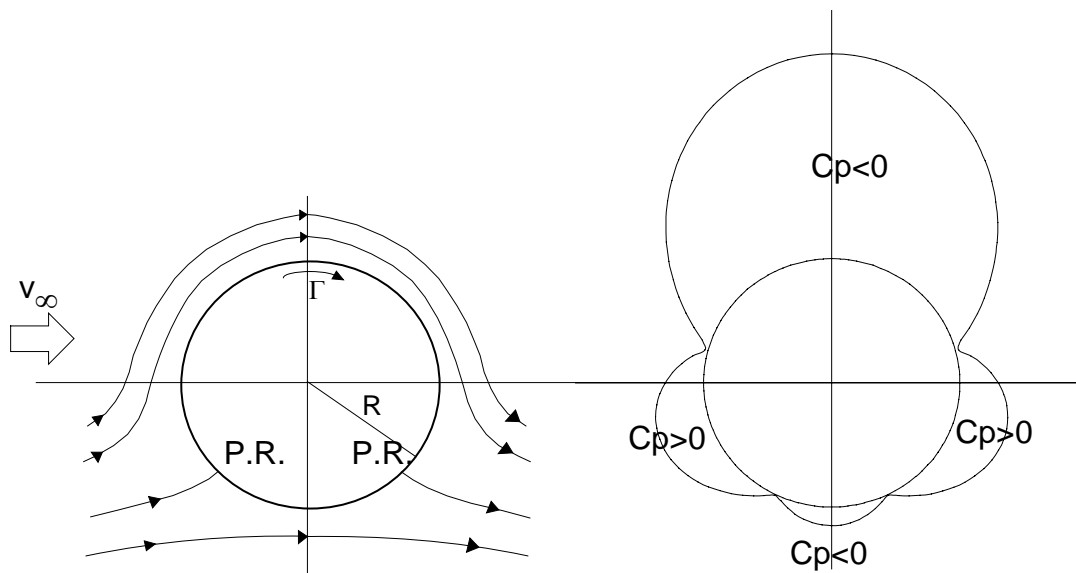


FIGURA 35

Il coefficiente di pressione risulta in questo caso:

$$c_p = 1 - \left(\frac{u}{v_\infty}\right)^2 = 1 - 4 \text{sen}^2 \theta - \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 v_\infty^2} - 2 \frac{\Gamma}{\pi R v_\infty} \text{sen } \theta.$$

5.4.7. Azioni dinamiche sul cilindro

Nelle ipotesi adottate per lo studio dei flussi potenziali, essendo trascurabili gli effetti della viscosità, le uniche tensioni in gioco sono quelle normali, descritte dal campo di pressione. La risultante delle azioni che il fluido esercita su di un corpo dal contorno C può essere quindi scritta per mezzo dell'equazione dell'energia (254):

$$\mathbf{F} = \int_C -p \mathbf{n} dC = \int_C \left(\frac{1}{2} \rho u^2 - k \right) \mathbf{n} dC = \frac{1}{2} \rho \int_C u^2 \mathbf{n} dC \quad (300)$$

dove k è una costante ed il suo integrale su tutto il contorno dà contributo nullo. Si è inoltre tenuto conto del fatto che la pressione rappresenta l'azione che la parte interna al contorno C esercita sulla parte esterna, che è uguale e contraria all'azione che il fluido esterno esercita sul contorno C. Sostituendo l'espressione della velocità sulla superficie di un cilindro investito da un flusso uniforme, dotato di circolazione, si ottiene:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \left(4v_\infty^2 \text{sen}^2 \theta + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2} + 2 \frac{\Gamma v_\infty}{\pi R} \text{sen } \theta \right) \mathbf{n} R d\theta.$$

L'integrale del primo termine tra parentesi è nullo perché si tratta di una funzione simmetrica (la stessa che si sarebbe ottenuta per un cilindro senza circolazione) mentre l'integrale del secondo

termine è nullo perché si tratta di un termine costante; rimane solo il contributo dell'ultimo termine. Scritto per componenti diventa:

$$\begin{cases} F_x = \rho \frac{\Gamma v_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\Gamma v_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d(\sin \theta) = 0 \\ F_y = \rho \frac{\Gamma v_\infty}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \end{cases} \quad (301)$$

L'integrale della seconda equazione può essere calcolato notando che:

$$\int_0^{2\pi} 1 d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = 2\pi$$

ma, dando i due integrali uguale contributo, ciascuno di essi vale π . Quindi, l'unica componente della forza che il fluido esercita sul cilindro, quella ortogonale alla corrente indisturbata, risulta:

$$\boxed{F_y = \rho v_\infty \Gamma}. \quad (302)$$

Questo risultato, dimostrato per un cilindro investito da un flusso uniforme, può essere generalizzato al caso di un qualsiasi corpo generato da pozzi, sorgenti, vortici e doppiette, investito da un flusso uniforme e, in questo caso, prende il nome di *teorema di Kutta-Joukowski* (che non sarà dimostrato in questa sede).

6. STRATO LIMITE

6.1. Equazione di Prandtl

Le ipotesi formulate nel capitolo precedente per giungere alla trattazione dei flussi potenziali sono senz'altro applicabili ad una vasta classe di problemi reali. Tra di esse, l'ipotesi che gli sforzi viscosi siano trascurabili rispetto alle forze di inerzia merita però una analisi più approfondita per individuare il suo campo di validità. Consideriamo come caso esemplificativo, quello di una lastra piana, investita da un flusso uniforme con velocità u_∞ di un fluido incomprimibile; supponiamo inoltre che il flusso indisturbato sia orientato secondo l'asse x e che tale sia anche la direzione della lastra.

Nella trattazione dei flussi potenziali, questo problema ha una soluzione banale: $u_x = u_\infty$. Secondo questa soluzione (Figura 36) la presenza della lastra non modifica il flusso uniforme.

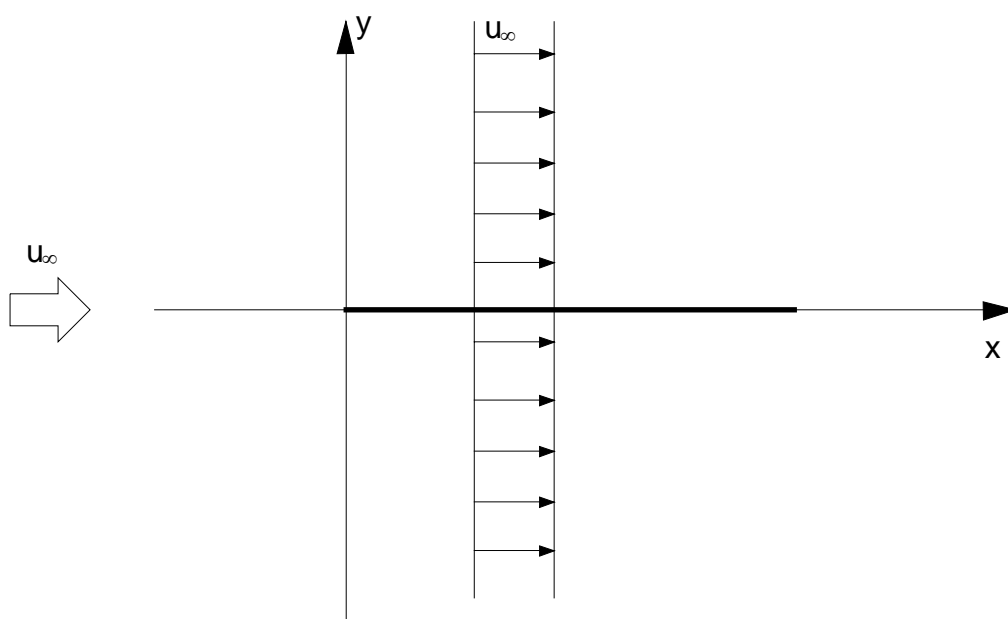


FIGURA 36

Tale soluzione soddisfa le condizioni al contorno all'infinito e quella di impermeabilità ma non la condizione di aderenza sul corpo, poiché la velocità sulla lastra è sì tangente, ma non nulla. In effetti, quale che sia il tipo di fluido considerato, esso è dotato di una viscosità la quale impone che la condizione di aderenza venga soddisfatta. Questo implica che, vicino alla parete, esista una zona nella quale i termini viscosi sono dello stesso ordine di grandezza dei termini inerziali, nella equazione di Navier-Stokes. In questa zona, che prende il nome di *strato limite*, il gruppo adimensionale che esprime il rapporto tra termini inerziali e termini viscosi, cioè il numero di

Reynolds, è di ordine 1. Al di fuori di essa il flusso può essere trattato trascurando gli effetti della viscosità, nello strato limite invece, dovremo fare altre ipotesi.

Impostiamo ora il problema nel caso di una lastra piana, tenendo conto però del fatto che i risultati ottenuti sono validi per qualsiasi superficie a patto che abbia debole curvatura, ovvero che il rapporto tra lo spessore dello strato limite ed il raggio di curvatura sia molto minore di 1.

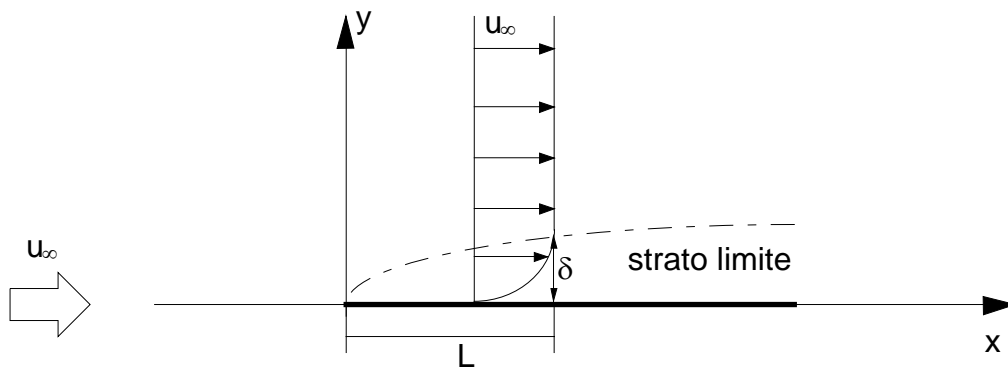


FIGURA 37

Per prima cosa identifichiamo le grandezze scala del nostro problema: esse saranno la densità ρ e la velocità u_∞ . Per ciò che riguarda la scala delle lunghezze, se immaginiamo che la lunghezza della piastra sia così grande da non influenzare il problema l'unica lunghezza che si può scegliere in direzione x è la distanza dal bordo d'attacco L (Figura 37). Nell'affrontare il problema dello strato limite formuleremo l'ipotesi fondamentale che esso sia caratterizzato da uno spessore, δ , molto piccolo rispetto alla scala delle lunghezze L :

$$\lambda = \frac{\delta}{L} \ll 1$$

Scriviamo le equazioni di bilancio adimensionalizzate rispetto a queste scale: l'equazione di bilancio della massa è:

$$\frac{u_\infty}{L} \frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + \frac{u_\infty}{L} \frac{\partial u_y^*}{\partial y^*} = 0,$$

da cui:

$$\frac{\partial u_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial u_y^*}{\partial y^*} = 0. \quad (303)$$

con:

$$x^* = x / L; \quad y^* = y / L; \quad u_x^* = u_x / u_\infty \quad u_y^* = u_y / u_\infty.$$

Valutiamo l'ordine di grandezza del primo termine della (303): i differenziali sono dell'ordine di grandezza della differenza tra il valore massimo ed il valore minimo della grandezza nel campo; la velocità u_x è senz'altro compresa tra u_∞ , al bordo superiore dello strato limite, e 0, alla parete, quindi $o(\Delta u_x) = u_\infty$. L'ascissa x invece varia tra 0 ed L , quindi $o(\Delta x) = L$. Ne consegue che il rapporto tra i due avrà ordine di grandezza u_∞ / L o, in termini adimensionali, $o(\partial u_x^* / \partial x^*) = 1$. Nel secondo termine, la y varia tra 0 e δ , quindi il suo differenziale è valutabile come $o(\Delta y) = \delta$, quindi

$o(\Delta y^*) = \delta / L = \lambda$. L'ordine di grandezza del differenziale della u_y non è invece stimabile a priori; sappiamo però che la velocità verticale varia tra 0 ed un valore di ordine incognito quindi, in analogia con le altre grandezze esaminate, il suo differenziale avrà lo stesso ordine di grandezza della velocità u_y stessa. Per determinarlo è sufficiente osservare che la somma dei due termini dell'equazione di bilancio della massa deve essere nulla, quindi essi devono necessariamente essere dello stesso ordine di grandezza. Ne consegue che il secondo termine deve essere di ordine 1 e $o(\Delta u_y^*) = o(u_y^*) = \lambda$.

Si consideri ora l'equazione di Navier-Stokes in forma adimensionale (194), scritta per un fluido incomprimibile ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), in termini del carico piezometrico h : facendo riferimento agli ordini di grandezza identificati in precedenza, valutiamo gli ordini di grandezza dei vari termini:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{R_{eL}} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{1}{R_{eL}} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) \end{array} \right. \quad (304)$$

nelle quali, per semplicità, gli asterischi sono stati omissi e Reynolds e Froude sono stati costruiti in base alle scale definite in precedenza:

$$R_{eL} = \frac{\rho u_\infty L}{\mu}; \quad F_r = \frac{u_\infty}{\sqrt{gL}}$$

La presenza di due scale delle lunghezze di ordine di grandezza diverso fa sì che non tutti i termini al di fuori dei gruppi adimensionali siano di ordine 1. Il numero di Reynolds che compare nelle equazioni precedenti non può essere quindi considerato indicativo di per sé dell'ordine di grandezza del rapporto tra forze inerziali e forze viscosi. Osserviamo i termini tra parentesi tonde: nella prima equazione, essendo per ipotesi $\lambda \ll 1$, il primo termine è sicuramente trascurabile rispetto al secondo. Per lo stesso motivo, anche nella seconda equazione, il primo termine tra parentesi è trascurabile rispetto al secondo. Rimane da identificare l'ordine di grandezza del numero di Reynolds. A tale scopo bisogna ricordare che abbiamo definito lo strato limite come quella zona del campo nel quale i termini viscosi hanno lo stesso ordine di grandezza dei termini inerziali: osservando la prima equazione, tale condizione è verificata se $o(1/R_{eL}) = \lambda^2$. Sulla base di questa considerazione, risulta:

$$\lambda = \frac{\delta}{L} \propto \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_\infty L}} \quad (305)$$

ovvero:

$$\delta \propto \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_\infty}} \sqrt{L} \quad (306)$$

dalla quale si evince che l'altezza dello strato limite, δ , cresce con la radice quadrata della distanza dal bordo d'attacco L . Se analizziamo la seconda equazione alla luce di questo risultato, potremo

osservare che, essendo tutti gli altri termini di ordine $\lambda \ll 1$, affinché l'equazione venga soddisfatta, anche l'unico termine di ordine incognito, $1/F_r^2 (\partial h / \partial y)$, non può avere ordine di grandezza superiore a λ :

$$\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial y} \ll 1$$

ovvero il carico piezometrico può essere considerato, con buona approssimazione, costante lungo la direzione y , normale alla superficie, e funzione della sola x . Esso può essere dunque determinato a partire dai valori che assume all'esterno dello strato limite, nella zona in cui è possibile utilizzare la formulazione dei flussi potenziali e, dal punto di vista dello strato limite, può essere considerato come un dato del problema.

In base alle considerazioni fatte sinora, rimane quindi da risolvere, un sistema di due equazioni nelle due incognite u_x e u_y : l'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes proiettata secondo l'asse x , nella quale sono stati trascurati i termini di ordine λ od inferiore (*equazione di Prandtl* (Prandtl, 1904):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{1}{F_r^2} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \end{array} \right. \quad (307)$$

6.2. Stato di tensione

Si vuole valutare l'ordine di grandezza degli sforzi tangenziali nello strato limite utilizzando un procedimento simile a quello del paragrafo precedente. Consideriamo innanzitutto l'equazione costitutiva (184), scritta per fluidi incomprimibili:

$$\underline{\underline{\tau}} = -p \underline{\underline{I}} + 2\mu \underline{\underline{e}}$$

ed adimensionalizziamola utilizzando le scale definite al paragrafo precedente, e ricordando che $\underline{\underline{\tau}} = \rho u_\infty^2 \underline{\underline{\tau}}^*$:

$$\underline{\underline{\tau}}^* = -p^* \underline{\underline{I}} + \frac{2}{R_e} \underline{\underline{e}}^* \quad (308)$$

La componente τ_{xy} è data da:

$$\tau_{xy}^* = \frac{2}{R_{eL}} e_{xy}^* = \frac{1}{R_{eL}} \left(\frac{\partial u_x^*}{\partial y^*} + \frac{\partial u_y^*}{\partial x^*} \right).$$

Nella parentesi all'ultimo membro, il primo termine è di ordine $1/\lambda$, mentre il secondo è di ordine $\lambda/1$; si può dunque trascurare il secondo termine rispetto al primo:

$$\tau_{xy}^* = \frac{2}{R_{eL}} e_{xy}^* = \frac{1}{R_{eL}} \frac{\partial u_x^*}{\partial y^*} \quad (309)$$

e, ricordando che $1/R_{eL}$ è di ordine λ^2 , otteniamo:

$$\tau_{xy}^* \propto \frac{\lambda^2}{\lambda} = \lambda \propto \sqrt{\frac{\mu}{\rho u_\infty}} \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (310)$$

avendo tenuto conto dell'ordine di grandezza di λ espresso nella (305). Passando alle grandezze dimensionali otteniamo:

$$\tau_{xy} \propto \sqrt{\rho u_\infty^3 \mu} \frac{1}{\sqrt{L}} \quad (311)$$

Questa relazione vale a qualsiasi quota interna allo strato limite, ma è particolarmente significativa calcolata in corrispondenza della parete, dove ci permette di stimare che gli sforzi tangenziali alla parete τ_0 , sono inversamente proporzionali alla radice quadrata della distanza dal bordo d'attacco, L , e direttamente proporzionali alla velocità del flusso indisturbato elevato alla 3/2; infatti, attraverso gli sforzi alla parete, τ_0 , possiamo calcolare la spinta per unità di larghezza esercitata dal fluido nel lambire la parete:

$$D = \int_0^d \tau_0 dx \propto \sqrt{\rho u_\infty^3 \mu} \sqrt{d} \quad (312)$$

avendo indicato con d la lunghezza totale della parete.

6.3. Spessore dello strato limite

La definizione dello spessore δ dello strato limite non può essere data in modo univoco poiché non esiste una separazione netta tra la zona in cui gli effetti della viscosità sono trascurabili e la zona in cui è necessario tenerne conto. In generale, esso è caratterizzato da un difetto di velocità, rispetto alla zona esterna, e si fa spesso riferimento a questa caratteristica per giungere ad una definizione.

Prandtl propose di definire altezza dello strato limite, come quella distanza dalla parete alla quale la velocità raggiunge una frazione data (per esempio il 99%) della velocità nella zona esterna. Tale definizione però soffre dell'arbitrarietà della frazione per cui si considerano coincidenti le velocità all'interno dello strato limite con quella della corrente potenziale esterna. Se tale costante è scelta in modo tale che la differenza sia troppo elevata si escludono dallo strato limite delle zone in cui gli effetti della viscosità risultano ancora rilevanti, se la differenza è piccola si includono zone ove la viscosità ha un ruolo irrilevante. Per eliminare questi inconvenienti si introducono altri spessori che, essendo di natura integrale, non risentono delle piccole differenze che esistono al bordo dello strato limite.

6.3.1. Spessore di spostamento

Alla presenza dello strato limite corrisponde una diminuzione della velocità in prossimità della parete che determina una diminuzione della portata (ovvero del flusso volumetrico) fluente attraverso una sezione ortogonale al flusso e che si estende dalla superficie della lastra fino all'infinito. Possiamo definire lo spessore dello strato limite in base a questo effetto: immaginiamo di schematizzarlo come l'annullarsi della velocità per uno spessore δ_1 mentre il resto del flusso rimane indisturbato, e definiamo δ_1 in modo che determini la stessa diminuzione di portata che si verifica a causa dell'effettivo campo di velocità: per tale altezza, le due aree campite in Figura 38 sono uguali tra loro. Ragioniamo su di uno strato di spessore unitario in direzione ortogonale al moto: la riduzione di portata dovuta all'annullamento della velocità in un strato di spessore δ_1 è pari

al prodotto della velocità esterna, u_e per lo spessore δ_1 . La riduzione di portata dovuta alla presenza dello strato limite è invece $\int_0^{\infty} (u_e - u_x) dy$, quindi:

$$\delta_1 = \frac{1}{u_e} \int_0^{\infty} (u_e - u_x) dy \quad (313)$$

Lo spessore di spostamento δ_1 è la distanza di cui si spostano, nella direzione ortogonale al corpo, le linee di corrente lontane da esso, per effetto della riduzione di velocità dovuta alla presenza dello strato limite.

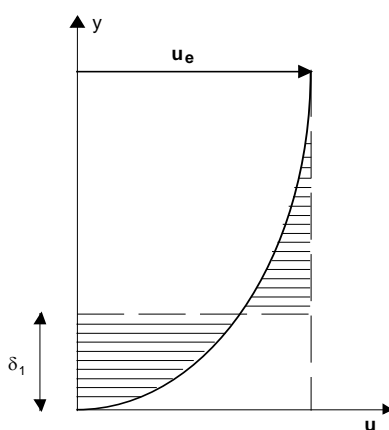


FIGURA 38

6.3.2. Spessore di quantità di moto

Utilizzando la stessa schematizzazione dello strato limite si può ottenere un'altra definizione di spessore a partire dalla variazione di quantità di moto che esso genera. Definiamo allora *spessore di quantità di moto*, δ_2 , lo spessore di flusso indisturbato che dovrebbe annullarsi per determinare una variazione di quantità di moto uguale a quella prodotta dallo strato limite.

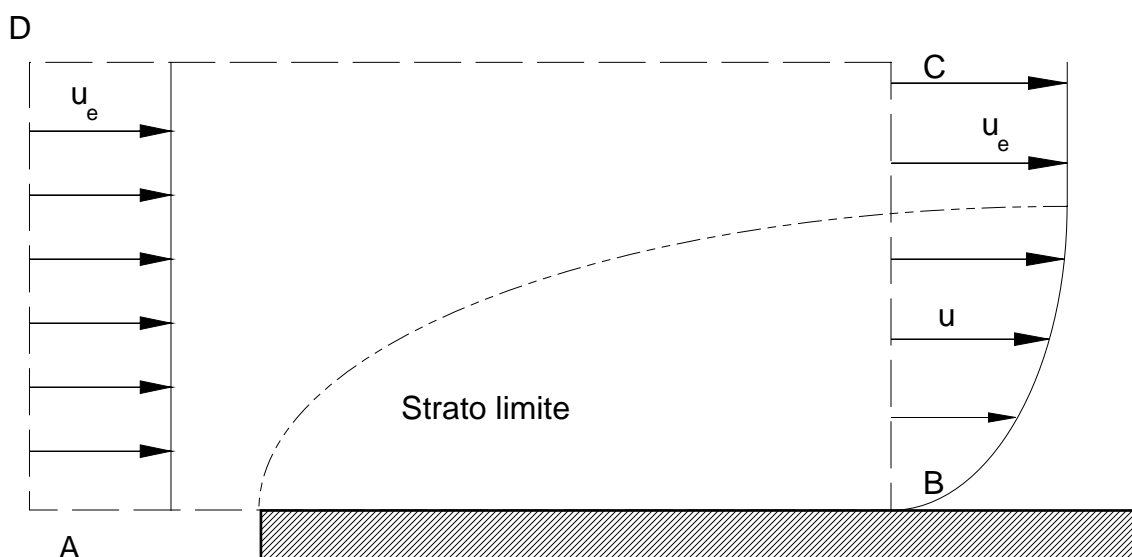


FIGURA 39

Consideriamo ancora una volta una profondità unitaria in direzione ortogonale al moto: la variazione di flusso di quantità di moto determinata dall'annullarsi della velocità in uno strato δ_2 è pari a $(-\delta_2 \rho u_e^2)$; per calcolare invece la variazione di quantità di moto dovuta alla presenza dello strato limite, facciamo riferimento al volume di controllo V_c , indicato con la linea tratteggiata in Figura 39, scelto in modo che il lato AD sia attraversato dal flusso indisturbato u_e , e la sua altezza, $\Delta \rightarrow \infty$, sia tale che il lato CD si trovi esternamente allo strato limite. La variazione dovuta allo strato limite sarà data dalla differenza tra il flusso di quantità di moto del flusso indisturbato, attraverso la sezione AD, ed il flusso di quantità di moto attraverso le superficie BC e CD. Avremo dunque:

$$M_{AD} = \int_0^{\infty} \rho u_e^2 dy; \quad M_{BC} = \int_0^{\infty} \rho u_x^2 dy.$$

Il flusso attraverso il lato CD si può calcolare come il prodotto del flusso di massa attraverso quella superficie moltiplicato per la velocità lungo x del fluido che, sul lato CD, è proprio pari ad u_e , per averlo scelto esterno allo strato limite. Nell'ipotesi di fluido incomprimibile, il flusso di massa attraverso CD si può calcolare come la differenza tra quello entrante da AD e quello uscente attraverso BC, $\int_0^{\infty} \rho(u_e - u_x) dy$, quindi si avrà:

$$M_{CD} = \int_0^{\infty} \rho u_e (u_e - u_x) dy.$$

Infine si può scrivere la variazione di flusso di quantità di moto:

$$\begin{aligned} \Delta M &= M_{BC} + M_{CD} - M_{AD} = \int_0^{\infty} \rho u_x^2 dy + \int_0^{\infty} \rho u_e (u_e - u_x) dy - \int_0^{\infty} \rho u_e^2 dy = \\ &= - \int_0^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy \end{aligned}$$

Uguagliando alla variazione di quantità di moto dovuta all'annullarsi della velocità per uno spessore δ_2 si ottiene l'espressione cercata:

$$\boxed{\delta_2 = \frac{1}{u_e^2} \int_0^{\infty} u_x (u_e - u_x) dy.} \quad (314)$$

6.4. Equazione di von Kármán

L'equazione di von Kármán rappresenta una equazione differenziale del prim'ordine, a derivate totali, che mette in relazione gli sforzi di parete al gradiente del carico piezometrico. Per ricavarla, consideriamo uno strato limite di parete come quello di Figura 40, ed individuiamo un volume di controllo, V_c , tra le sezioni x ed x+dx, la cui superficie sia S_c . Scegliamo tale volume in modo che la sua altezza, Δ , capiti sicuramente all'esterno dello strato limite, dove possiamo utilizzare la trattazione dei flussi potenziali. Se inoltre la piastra è infinitamente estesa nella direzione ortogonale alla direzione del flusso indisturbato, il problema è bidimensionale e si possono effettuare tutti i calcoli per unità di lunghezza in tale direzione. Per l'ipotesi di incomprimibilità si ha:

$$0 = \int_{V_c} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{S_c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Scomponiamo l'integrale di superficie come la somma dei contributi su ciascuna delle facce del volume V_c :

$$0 = \int_{AB} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{BC} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{CD} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{DA} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (315)$$

e calcoliamo i singoli termini: il primo termine è nullo perché, per la condizione di aderenza, la velocità è sempre nulla alla parete; sulla prima sezione ortogonale al moto (AD), la velocità è opposta alla normale esterna, quindi:

$$\int_{AD} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = - \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_x \cdot 1 \quad (316)$$

il flusso uscente dalla seconda sezione ortogonale al moto, può essere invece espresso per mezzo di uno sviluppo in serie al prim'ordine:

$$\int_{BC} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_{x+dx} \cdot 1 = \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right] dx + o(dx^2); \quad (317)$$

l'ultimo termine può essere ricavato sostituendo la (316) e la (317) nella (315):

$$\int_{DC} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_x - \left\{ \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right] dx \right\} = - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right] dx. \quad (318)$$

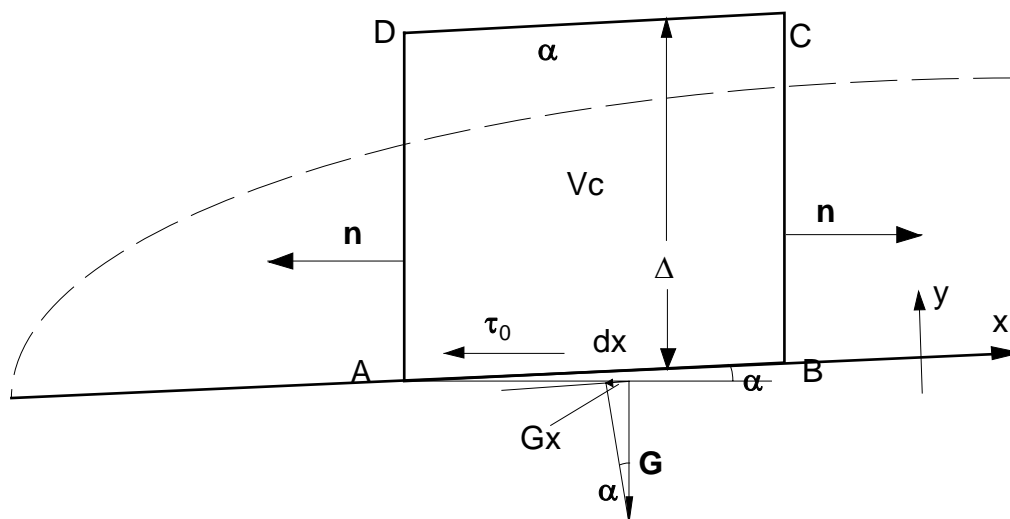


FIGURA 40

Applichiamo, allo stesso volume, l'equazione globale della quantità di moto proiettata in direzione x :

$$I_x + M_x = \Pi_x + G_x \quad (319)$$

nelle ipotesi di flusso stazionario ($I_x = 0$). Il flusso di quantità di moto può essere scomposto, al solito, nei contributi dovuti alle singole facce:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{AB} + \mathbf{M}_{BC} + \mathbf{M}_{CD} + \mathbf{M}_{DA}, \quad (320)$$

che possono essere calcolati separatamente:

$$\mathbf{M}_{DA} = \int_0^{\Delta} \rho \mathbf{u}_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dy \cdot 1 = -\rho \left[\int_0^{\Delta} u_x^2 dy \right]_x \quad (321)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{BC} &= \left[\int_0^{\Delta} \rho \mathbf{u}_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dy \right]_{x+dx} \cdot 1 = \rho \left[\int_0^{\Delta} u_x^2 dy \right]_{x+dx} = \\ &= \rho \left\{ \left[\int_0^{\Delta} u_x^2 dy \right]_x + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x^2 dy \right] dx \right\} \end{aligned} \quad (322)$$

avendo sviluppato in serie di Taylor la seconda in analogia con quanto fatto in precedenza. L'integrale al bordo superiore dello strato limite si può calcolare tenendo conto che, per l'ipotesi fatta sull'altezza Δ , su quella faccia $u_x \approx u_e$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{CD} &= \int_{CD} \rho \mathbf{u}_x (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dx \cdot 1 = \rho u_e \int_{CD} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) dx = \\ &= -\rho u_e \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right] dx = \rho \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left[u_e \int_0^{\Delta} u_x dy \right] + \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_x \right\}, \end{aligned} \quad (323)$$

avendo utilizzato la relazione (319), precedentemente calcolata, per il flusso volumetrico sulla faccia CD. Sostituendo nell'espressione di \mathbf{M}_x :

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_x &= \rho \left\{ -\int_0^{\Delta} u_x^2 dy + \int_0^{\Delta} u_x^2 dy + \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x^2 dy \right] dx - u_e \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right] dx \right\} = \\ &= \rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} (u_x^2 - u_e u_x) dy \right] dx + \rho \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_x \end{aligned}$$

Valutiamo ora il termine $\Pi_x = \Pi_{AB} + \Pi_{BC} + \Pi_{CD} + \Pi_{DA}$:

$$\Pi_{AB} = \int_{AB} \tau_x dS = -\tau_0 dx$$

in quanto τ_0 è proprio lo sforzo lungo x alla parete, che risulta diretto in senso opposto al verso positivo delle x . Il contributo sulla faccia AD è invece:

$$\Pi_{DA} = \int_{AD} \tau_x dS = \left[\int_0^{\Delta} p dy \right]_x \cdot 1$$

(avendo trascurato, nel considerare lo stato di tensione, il termine $2\mu \partial u_1 / \partial x_1$ rispetto alla pressione) Analogamente, sviluppando in serie di Taylor, possiamo esprimere il contributo sulla faccia BC:

$$\int_{BC} \tau_x dS = - \left[\int_0^{\Delta} p dy \right]_{x+dx} \cdot 1 = - \left[\int_0^{\Delta} p dy \right]_x - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} p dy \right] dx ,$$

e sulla faccia CD osserviamo prima di tutto che:

$$\tau_{xy} = 2\mu e_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = 0$$

poiché entrambe le derivate sono nulle essendo $u_x \approx u_e(x)$ e $u_y \approx 0$. Rimane quindi solo il contributo dovuto alla pressione normale che non ha componente in direzione x:

$$\Pi_{CD} = 0. \quad (324)$$

Sostituiamo l'espressione di tutti i termini nella espressione della Π_x :

$$\Pi_x = -\tau_0 dx + \int_0^{\Delta} p dy - \int_0^{\Delta} p dy - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} p dy \right] dx = -\tau_0 dx - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} p dy \right] dx .$$

La componente lungo x della forza gravitazionale, G_x , è dato da:

$$G_x = -\gamma \Delta dx \operatorname{sen} \alpha = -\gamma \Delta dx \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} \gamma z dy \right] dx ; \quad (325)$$

essendo $\gamma = \rho g$ il peso specifico del fluido ed α l'angolo di inclinazione dell'asse x (Figura 40).

Se riprendiamo infine la (319) che, nelle ipotesi effettuate, diventa $\Pi_x + G_x = M_x$, e sostituiamo le espressioni ricavate per i 3 termini, si ottiene

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} (u_x^2 - u_e u_x) dy \right] dx + \rho \frac{\partial u_e}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} u_x dy \right]_x dx = -\tau_0 dx - \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} \gamma \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) dy \right] dx . \quad (326)$$

Nella parentesi tonda all'ultimo membro compare il carico piezometrico $h = z + p / \gamma$ che, nello strato limite dipende dalla sola x: $h(x) = h_e(x)$. D'altra parte nello strato esterno abbiamo supposto il flusso potenziale, quindi l'equazione dell'energia meccanica è:

$$H = h_e + \frac{u_e^2}{2g} = \cos t.$$

quindi:

$$\gamma \frac{\partial h}{\partial x} = \gamma \frac{\partial h_e}{\partial x} = -\rho \frac{1}{2} \frac{\partial u_e^2}{\partial x} = -\rho u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \quad (327)$$

sostituendo nella precedente e dividendo per dx:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \int_0^{\Delta} (u_x^2 - u_e u_x) dy + \rho \frac{\partial u_e}{\partial x} \int_0^{\Delta} u_x dy = -\tau_0 dx + \frac{\partial u_e}{\partial x} \int_0^{\Delta} \rho u_e dy$$

ovvero:

$$\rho \frac{\partial}{\partial x} \left[\int_0^{\Delta} (u_x^2 - u_e u_x) dy \right] + \rho \frac{\partial u_e}{\partial x} \int_0^{\Delta} (u_x - u_e) dy = -\tau_0. \quad (328)$$

È immediato riconoscere nei due integrali dell'equazione precedente, quelli che compaiono, rispettivamente, nella definizione di spessore di quantità di moto ed in quella di spessore di spostamento, cambiati di segno. Se quindi facciamo crescere Δ fino all'infinito possiamo riscrivere la relazione precedente in funzione di queste due quantità:

$$\rho \frac{\partial (u_e^2 \delta_2)}{\partial x} + \rho u_e \frac{\partial u_e}{\partial x} \delta_1 = \tau_0, \quad (329)$$

che è una prima formulazione dell'*equazione integrale di von Kármán*. Utilizzando la (327) nel verso opposto a quello utilizzato precedentemente ne otteniamo una formulazione in termini di pendenza piezometrica, $i = -\partial h / \partial x$, e sforzi alla parete:

$$\boxed{\frac{\partial (u_e^2 \delta_2)}{\partial x} + \frac{\tau_0}{\rho} = g \delta_1 i}. \quad (330)$$

6.5. Resistenza di una lastra piana

Lo spessore di quantità di moto è strettamente legato alla resistenza offerta da un corpo investito da un fluido in conseguenza della generazione dello strato limite. Consideriamo, ad esempio, il caso di una lastra piana, di lunghezza L , disposta orizzontalmente, investita da un flusso uniforme di velocità u_e , ed applichiamo l'equazione globale della quantità di moto al volume ABCD, ragionando per unità di lunghezza nella direzione ortogonale al piano del disegno e proiettandola in direzione x :

$$I_x + M_x = \Pi_x + G_x$$

il termine di inerzia locale, I_x , è nullo perché il problema è stazionario, il termine G_x è nullo perché la gravità non ha componente in direzione orizzontale, il termine Π_x , rappresenta invece le forze di superficie che sono applicate al fluido contenuto nel volume di controllo.

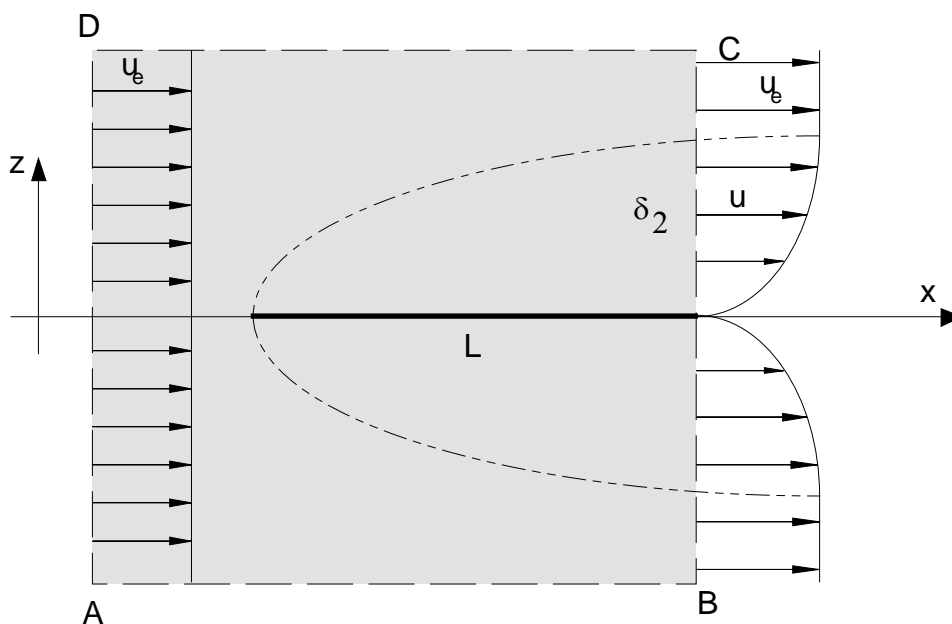


FIGURA 41

In questo caso, le uniche forze di superficie che hanno componente lungo x sono quelle tangenziali che la lastra esercita sul fluido, che sono uguali ed opposte a quelle che il fluido esercita sulla lastra; quindi la resistenza R sarà: $R = -\Pi_x$. Non rimane che calcolare il termine M_x . I flussi attraverso AD e BC sono:

$$M_{AD} = -\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_e^2 dy; \quad M_{BC} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x^2 dy,$$

avendo tenuto conto del fatto che sono considerati positivi i flussi uscenti dal volume di controllo; quelli attraverso AB e CD possono essere valutati, in analogia a quanto fatto nel calcolo dello spessore di quantità di moto come:

$$M_{AB} + M_{CD} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy.$$

Il flusso totale risulta quindi:

$$\begin{aligned} M &= M_{AB} + M_{BC} + M_{CD} + M_{AD} = \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x^2 dy + \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \rho u_e^2 dy = \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy = -2 \int_0^{\infty} \rho u_x (u_e - u_x) dy = -2\delta_2(L)\rho u_e^2 \end{aligned}$$

La resistenza offerta dalla piastra al fluido che la lambisce è dunque:

$$\boxed{R = -\Pi_x = -M_x = 2\delta_2(L)\rho u_e^2} \quad (331)$$

6.5.1. Soluzione di Blasius

Trattandosi di un campo bidimensionale piano è possibile introdurre la funzione di corrente ψ . L'equazione di Prandtl, in forma dimensionale, nel caso stazionario, risulta dunque:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} \quad (332)$$

Utilizzando in luogo di y la variabile $\eta = y/\delta$, il campo di integrazione della precedente equazione risulta essere rettangolare. Si vuole verificare se esiste una soluzione a variabili separate per la funzione di corrente:

$$\boxed{\psi(x, \eta) = f(\eta)g(x)} \quad (333)$$

Se tale soluzione esiste, una volta noto il profilo di velocità ad una assegnata x , è possibile ricostruire il profilo in qualsiasi punto, nota la $g(x)$. I profili opportunamente scalati sono tra loro sovrapponibili; per questo si parla di soluzione simile.

Tenendo conto della legge di crescita dello spessore dello strato limite (306) risulta:

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{\delta}; \quad \frac{\partial \delta}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\delta}{x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\eta}{2x} \quad (334)$$

Indicando con l'apice ' le derivate di f e g rispetto ai relativi argomenti si ha:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = gf' \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{gf'}{\delta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \frac{gf''}{\delta^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} = \frac{gf'''}{\delta^3} \end{aligned} \quad (335)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{g'f'}{\delta} - \frac{gf''\eta}{2x\delta} - \frac{gf'}{2\delta x}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -g'f + g \frac{f'\eta}{2x}$$

Sostituite nella equazione di Prandtl si ha:

$$f''' + f''f \left(\frac{g'\delta}{\nu} \right) + \frac{f'^2\delta}{\nu} \left(\frac{g}{2x} - g' \right) = 0 \quad (336)$$

Affinché la soluzione a variabili separate esista, le quantità tra parentesi debbono risultare costanti; sulla g vengono imposte quindi due condizioni e non è detto che il problema abbia soluzione. La prima condizione sull'equazione differenziale risulta:

$$\frac{g'\delta}{v} = \text{cost} \quad (337)$$

senza perdita di generalità si propone la costante uguale a 1/2 e la funzione di corrente uguale a zero per la linea limite coincidente con la piastra; si ha:

$$g = \sqrt{vu_{\infty}x} \quad (338)$$

L'espressione ottenuta per la g porta ad affermare che anche la seconda quantità tra parentesi nella (336) è costante, in particolare è zero. Per trovare l'andamento della velocità nella direzione ortogonale alla parete si deve integrare la seguente equazione differenziale alle derivate ordinarie del terzo ordine (*equazione di Blasius*):

$$\boxed{f''' + \frac{1}{2}f''f = 0} \quad (339)$$

Le condizioni ai limiti sono:

- alla parete $\eta=0$:

$$u = \frac{gf'}{\delta} = 0 \Rightarrow f'(0) = 0 \quad (340)$$

$$v = -g'f + \frac{gf'\eta}{2x} = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \quad (341)$$

- al di fuori dello strato limite $\eta \gg 1$:

$$u = u_{\infty} = \frac{gf'}{\delta} = \frac{\sqrt{vu_{\infty}x}}{\sqrt{\frac{xv}{u_{\infty}}}} f'(\eta) \Rightarrow f'(\eta) = 1 \quad (342)$$

Poiché non si hanno tutte le condizioni iniziali per $\eta=0$, si impone, per potere integrare la (339), un valore iniziale per f'' ripetendo il procedimento di integrazione fin tanto che la condizione finale (342) non è soddisfatta a meno di un prefissato errore. La condizione iniziale sulla derivata seconda che permette di soddisfare le condizioni ai limiti è:

$$\boxed{f''(0) = 0.332} \quad (343)$$

Nella Figura 42 è riportato l'andamento di $f(\eta)$, $f'(\eta)$ ed $f''(\eta)$. Lo spessore dello strato limite δ , per il quale la velocità si discosta dell'1% dalla u_{∞} , si ottiene identificando il valore di η per il quale $f' = 0.99$; tale valore risulta circa pari a 5, quindi la legge di crescita è:

$$\boxed{\eta = 5 \sqrt{\frac{vx}{u_{\infty}}}} \quad (344)$$

Lo sforzo tangenziale alla parete è dato da:

$$\tau_0 = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{gf''}{\delta^2} = \mu \frac{u_{\infty}}{\delta} f''(0) \quad (345)$$

il coefficiente di attrito locale è quindi:

$$c_f(x) = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_\infty^2} = \frac{2f''(0)}{\sqrt{Re_x}} \quad (346)$$

con $Re_x = \rho u_\infty x / \mu$. La resistenza della lastra risulta:

$$R = 2 \int_0^L \tau_0 dx = 4f''(0) \sqrt{u_\infty^3 \mu \rho L} \quad (347)$$

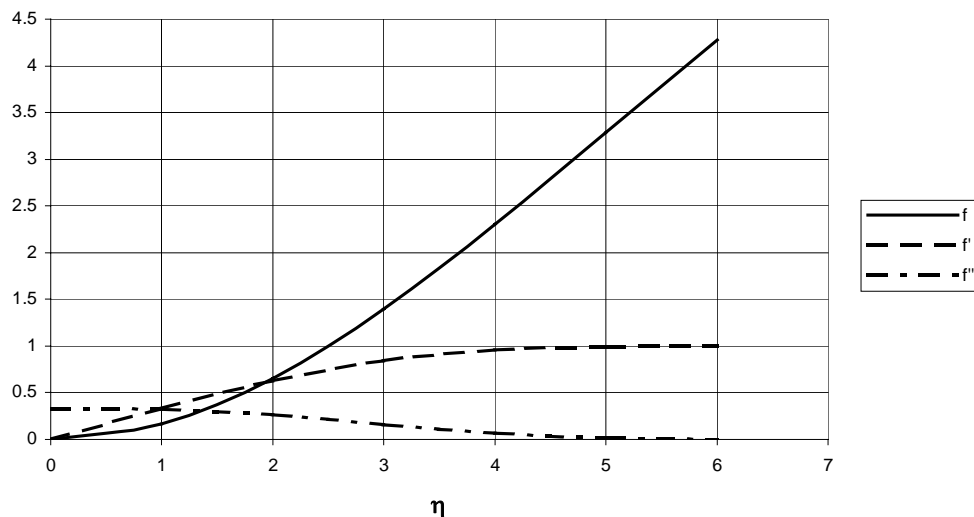


FIGURA 42

6.6. Separazione dello strato limite

Quando il fluido che investe una parete è costretto a repentini cambiamenti di direzione può avvenire la cosiddetta *separazione della vena fluida*: la linea di corrente che lambisce la parete si stacca e, a valle di questa separazione, si crea una zona vorticoso nella quale il moto non contribuisce al flusso medio del fluido ma ha la sola conseguenza di determinare elevati tassi di dissipazione di energia. Questo fenomeno può avvenire sul dorso di un profilo investito da un flusso, quando esso sia posto ad un angolo di attacco sufficientemente grande rispetto al flusso incidente, oppure in prossimità di oggetti tozzi o, infine, in corrispondenza di curvature della parete (per esempio l'allargamento di un tubo) che determinino un gradiente di pressione avverso (Figura 43). Il meccanismo attraverso il quale avviene il distacco è schematizzato in Figura 44, nella quale sono rappresentati i profili di velocità in 3 sezioni del flusso di Figura 43c. Partendo da un profilo del tipo S1, la velocità diminuisce sempre di più all'interno dello strato fino a quando, nel punto di separazione, il profilo ha tangente verticale (sezione S2):

$$\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_{y=0} = 0; \quad (348)$$

a valle di questo punto si ha una zona di ricircolo, nella quale la velocità si inverte (sezione S3). L'equazione di Prandtl, in forma dimensionale, scritta sulla parete, dove $u_x = u_y = 0$, è:

$$g \frac{\partial h}{\partial x} = v \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} . \quad (349)$$

Nella Figura 44 possiamo osservare, inoltre, che il profilo S1 è ovunque convesso nello strato limite ($\partial^2 u_x / \partial y^2 < 0$) e quindi non ha punti di flesso: per la equazione precedente questo profilo è compatibile con un gradiente di carico piezometrico negativo; il profilo S2, invece, cambia concavità e mostra un flesso; poiché la curva è ancora convessa nella parte lontana dalla parete, essa dovrà essere concava in prossimità di essa, questo implica che $\partial^2 u_x / \partial y^2 > 0$ e quindi tale configurazione è compatibile solo con un gradiente di carico piezometrico positivo. Si può concludere quindi che la separazione dello strato limite può avvenire solo in corrispondenza di una zona nella quale il gradiente di carico piezometrico sia positivo, ciò corrisponde ad una zona di flusso rallentato (Prandtl, 1904). Se consideriamo, ad esempio, il flusso all'interno di un condotto nel quale sia introdotta una diminuzione locale della sezione, l'eventuale distacco dello strato limite avviene generalmente prima nella zona di espansione che non in quella di contrazione.

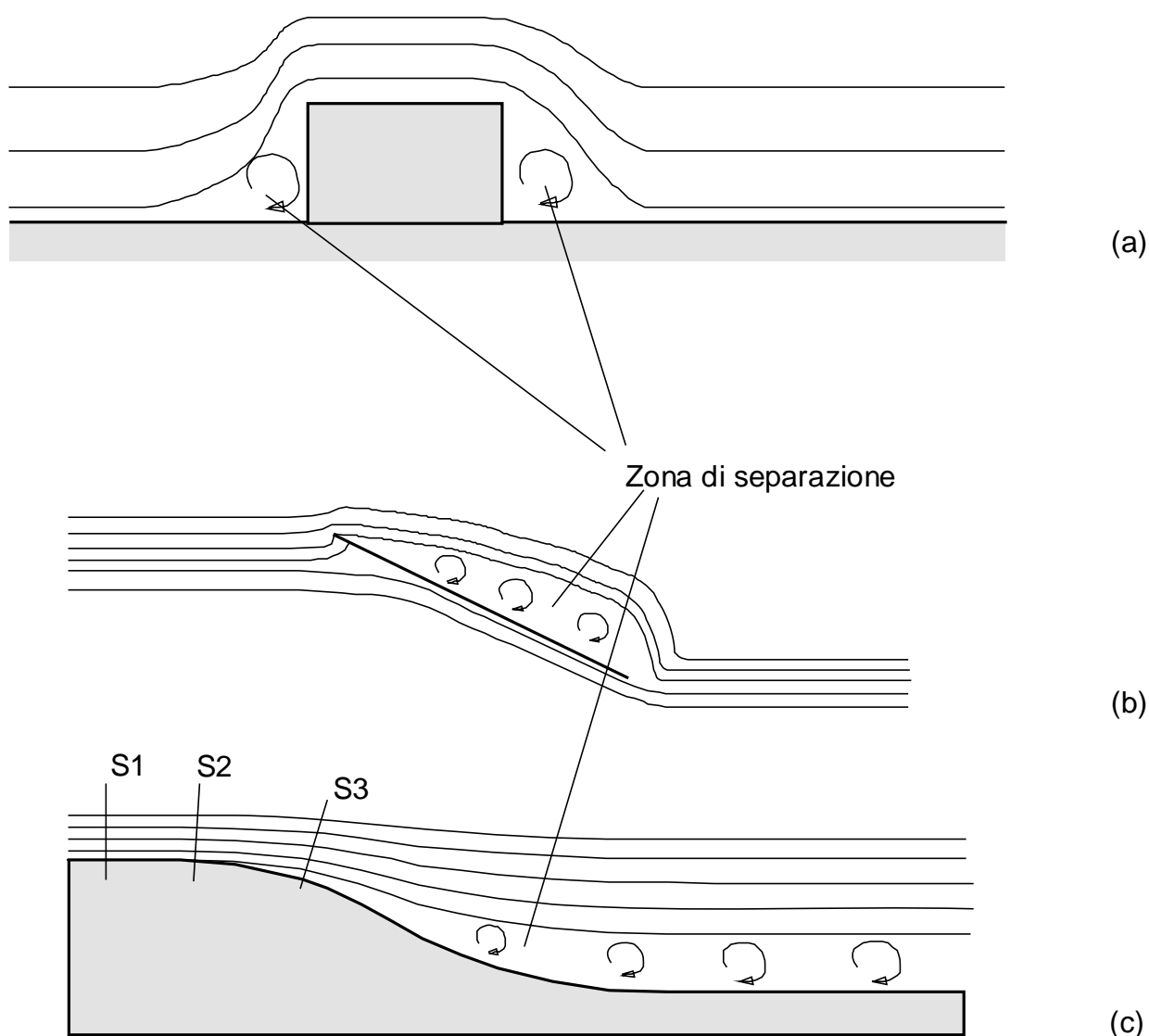


FIGURA 43

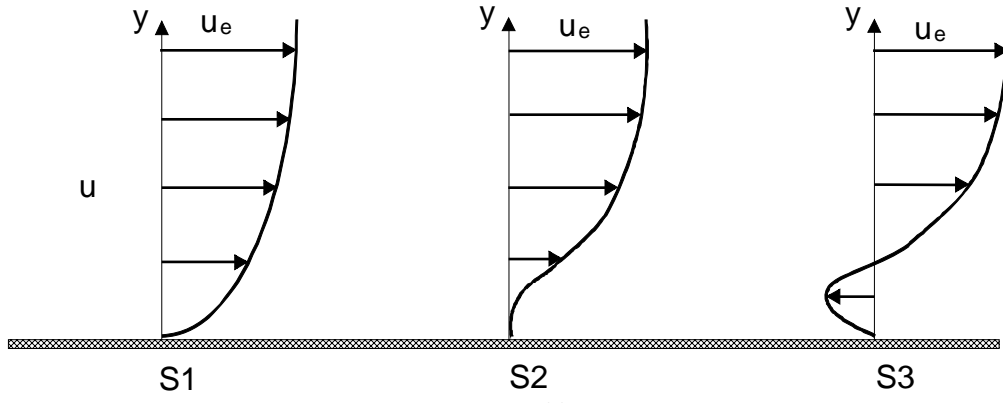


FIGURA 44

7. TURBOLENZA

7.1. Definizione

Nella trattazione sinora svolta, è stata fatta l'ipotesi implicita che i flussi studiati fossero deterministici, nel senso che, una volta note le equazioni che li reggono con le loro condizioni iniziali ed al contorno, fosse possibile, almeno in linea di principio, risolverle e prevedere l'evoluzione del sistema per un intervallo di tempo finito. In effetti, vi sono situazioni nelle quali questa prevedibilità viene a mancare, ed il moto si dice *turbolento*, distinguendolo da quelli trattati sinora che si dicono *laminari*. Si può avere flusso turbolento a valle di una separazione dello strato limite, oppure nel flusso ad elevato numero di Reynolds in un condotto, ed in molti altri casi.

Il regime turbolento nel moto di un fluido è caratterizzato, in relazione al regime laminare, dai seguenti aspetti:

- il movimento è disorganizzato ed è irregolare nel tempo e nello spazio;
- il moto turbolento è *sensibile alle condizioni iniziali*, nel senso che piccole modifiche danno luogo a successivi grandi cambiamenti: la sensibilità alle condizioni iniziali è ciò che caratterizza un sistema caotico;
- i fenomeni di dispersione sono molto accentuati;
- gli esperimenti non sono ripetibili; per esempio se si riproduce il moto turbolento nel fluido che si muove in un condotto che unisce due serbatoi, si trova che la velocità in un assegnato punto ed in un assegnato istante è differente per differenti ripetizioni dello stesso esperimento.

Le caratteristiche caotiche di un moto turbolento e la non prevedibilità dei suoi dettagli non significano che non esista una relazione di causa ed effetto che regola il verificarsi delle fluttuazioni turbolente, la loro apparente aleatorietà è solo un effetto della sensibilità alle condizioni iniziali. Analizziamo il problema più in dettaglio: in un sistema sensibile alle condizioni iniziali una perturbazione infinitesima a tali condizioni porta a variazioni finite nell'evoluzione del sistema in un tempo finito; in un sistema deterministico invece, una perturbazione infinitesima delle condizioni iniziali porta ad una variazione infinitesima dell'evoluzione in un intervallo di tempo finito.

Per chiarire questo punto immaginiamo di condurre un esperimento: consideriamo il flusso all'interno di un condotto (Figura 45), e supponiamo di rilasciare, all'istante t_0 , una particella, P, nella posizione \mathbf{x}_0 . Dopo un tempo finito, Δt , la particella si troverà nella posizione $\mathbf{x}_1 = \mathbf{X}(\mathbf{x}_0, t_0 + \Delta t)$. Se ripetiamo l'esperimento, nel posizionare la particella P', commetteremo necessariamente un errore, tutt'al più infinitesimo, ε . Se il flusso è laminare, dopo l'intervallo Δt , l'errore sarà $\lambda\varepsilon$, con λ una costante di ordine 1, cioè dello stesso ordine di grandezza di ε (Figura 45a). Quindi se abbiamo identificato la posizione iniziale della particella con un errore così piccolo da essere trascurabile, anche l'errore nella posizione finale sarà trascurabile. Conduciamo lo stesso esperimento in un flusso turbolento, in questo caso la particella P', che viene rilasciata con un errore iniziale ε , si troverà, dopo lo stesso intervallo di tempo Δt , in una posizione \mathbf{x}'_1 . In questo

caso non si può asserire che Δx sia dello stesso ordine di grandezza di ε , al contrario, anche se ε è infinitesimo Δx può essere una quantità finita (Figura 45b). Questo vuol dire che, per quanto si riduca l'errore iniziale, l'errore nella determinazione della posizione finale della particella rimane finito, e quindi non trascurabile: di fatto non è possibile prevedere, quale sarà la posizione finale della particella con un errore accettabile.

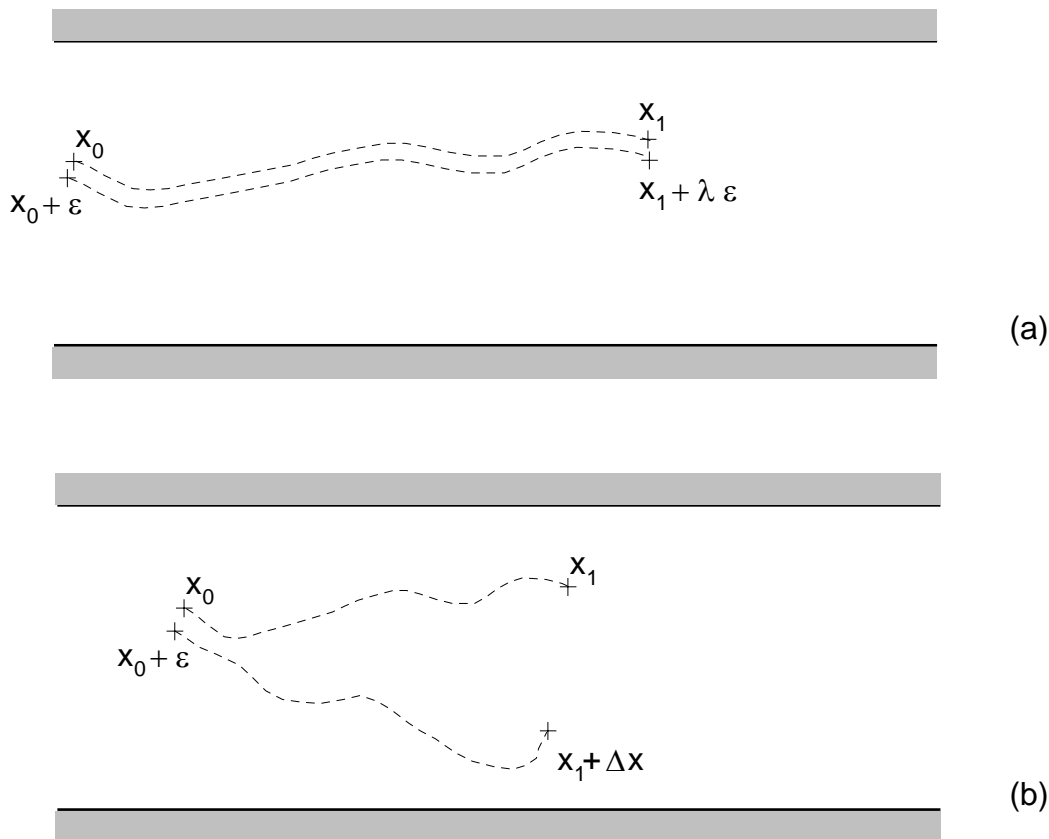


FIGURA 45

Per individuare quali parametri influenzino il fatto che un flusso sia laminare o turbolento affrontiamo il problema dal punto di vista della stabilità: se il moto è laminare una perturbazione cede energia al flusso e quindi tende a smorzarsi, nel caso di flusso turbolento invece la perturbazione assorbe energia dal flusso e tende quindi ad essere amplificata, passando da infinitesima a finita in un tempo finito. Prendiamo ad esempio il flusso unidirezionale di un fluido incomprimibile rappresentato dalle linee di corrente, a distanza infinitesima, d , di Figura 46 ed immaginiamo che qualche causa abbia determinato una perturbazione infinitesima sinusoidale della linea di corrente b . Analizziamo quindi il tubo di flusso compreso tra le linee b e c , indicando le grandezze che caratterizzano questo tubo di flusso con il suffisso $+$, ed il tubo compreso tra b ed a indicando le grandezze relative con il suffisso $-$. Notiamo innanzitutto che il flusso volumetrico, per unità di lunghezza, q , che passa tra le linee di corrente b e c è lo stesso nella sezione 1 e nella sezione 2. Inoltre, la geometria del disturbo introdotto implica, ovviamente che:

$$d_{1+}^+ < d;$$

$$d_{2+}^+ > d$$

e per simmetria si ha:

$$d_{1+} = d_{2-}$$

$$d_{1-} = d_{2+}$$

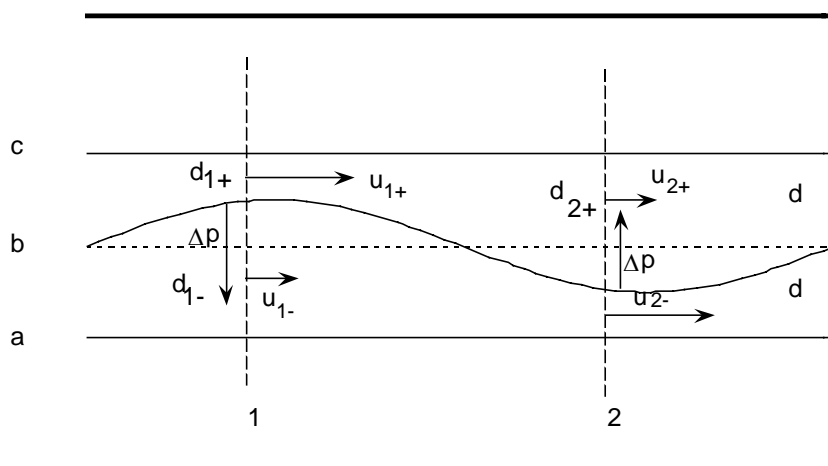


FIGURA 46

La costanza del flusso nei due tubi di flusso ci dà:

$$q = d u = d_{1+} u_{1+} = d_{2+} u_{2+},$$

sul tubo di flusso tra b e c, e

$$q = d u = d_{1-} u_{1-} = d_{2-} u_{2-}.$$

dalle quali si evince, stanti le relazioni di simmetria precedentemente stabilite tra le distanze tra le linee di corrente, che $u_{1+} = u_{2-} \equiv u'$ e $u_{1-} = u_{2+} \equiv u''$. ed inoltre che $u' > u''$. Scriviamo l'equazione dell'energia meccanica (213), integrata lungo una linea di corrente tra le sezioni 1 e 2:

$$g \int_1^2 \nabla H \cdot ds = g(H_2 - H_1) = \nu \int_1^2 \nabla^2 \mathbf{u} \cdot ds,$$

adimensionalizzando rispetto ad una scala delle lunghezze L , una densità ρ ed una scala delle velocità U , analogamente a quanto fatto con l'equazione di Navier-Stokes, si ottiene:

$$H_2^* - H_1^* = \frac{1}{R_e} \left(\int_1^2 \nabla^2 \mathbf{u} \cdot ds \right)^* = -\frac{1}{R_e} \delta R^*$$

avendo indicato con δR^* gli effetti della dissipazione nel tratto 1-2. Scriviamo questa relazione per i due tubi di flusso, omettendo gli asterischi per semplicità di notazione:

$$\begin{cases} H_{1+} = H_{2+} + \frac{1}{R_e} \delta R_+ \\ H_{1-} = H_{2-} + \frac{1}{R_e} \delta R_- \end{cases}$$

sostituendo ad H la sua definizione (adimensionalizzata risulta $H = p + u^2 + z/F_r^2$) e trascurando gli effetti del campo gravitazionale ($F_r \rightarrow \infty$) possiamo riscrivere le precedenti come:

$$\begin{cases} p_{1+} + \frac{u'^2}{2} = p_{2+} + \frac{u''^2}{2} + \delta R_+ \\ p_{1-} + \frac{u''^2}{2} = p_{2-} + \frac{u'^2}{2} + \delta R_- \end{cases}.$$

sottraendo la seconda alla prima, possiamo calcolare la differenza di pressione media attraverso le due sezioni che, agendo nella direzione indicata in Figura 46, tende ad opporsi alla perturbazione:

$$\Delta p = \frac{(p_{1+} - p_{1-}) + (p_{2-} - p_{2+})}{2} = \frac{1}{2}(u''^2 - u'^2) + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\delta R_+ + \delta R_-}{2} \right). \quad (350)$$

Se $\Delta p > 0$ la perturbazione tende ad essere smorzata: il flusso è stabile e quindi laminare, se $\Delta p < 0$ la differenza di pressione tende ad amplificare il disturbo ed il flusso è instabile: qualsiasi perturbazione infinitesima viene amplificata fino a diventare finita quindi si tratta di un flusso turbolento. Il primo termine a terzo membro è sempre negativo, quindi, in assenza del termine viscoso il flusso sarebbe sempre instabile e quindi turbolento. La condizione limite, in cui la dissipazione viscosa bilancia esattamente gli effetti della instabilità, si ha per $\Delta p = 0$, ovvero:

$$\frac{1}{R_e} \delta R = \frac{1}{2}(u'^2 - u''^2)$$

la quale permette di mettere in evidenza il fatto che esisterà un valore critico del numero di Reynolds, R_{ec} , che separa i due comportamenti: per $R_e > R_{ec}$ il Δp diventa negativo ed il flusso è turbolento, mentre per $R_e < R_{ec}$ il flusso è laminare. Ad esempio il flusso diventa turbolento:

- in un condotto a sezione circolare quando $R_e = \frac{uD}{\nu} \geq 2000$ (essendo u la velocità media, D il diametro del condotto e ν la viscosità cinematica);
- nello strato limite, quando $R_e = \frac{\delta_1 u_\infty}{\nu} \geq 600$ (essendo u_∞ la velocità al di fuori dello strato limite, δ_1 lo spessore di spostamento).

7.2. Descrizione statistica della turbolenza

La sensibilità alle condizioni iniziali che caratterizza la turbolenza fa perdere ogni interesse nel cercare di prevedere il comportamento della singola particella fluida o l'evoluzione del campo di moto nella singola realizzazione di un esperimento. In effetti viene a mancare uno dei fondamenti della indagine scientifica: la ripetibilità degli esperimenti. Anche l'avere a disposizione una soluzione analitica del sistema di equazioni differenziali che regge il fenomeno (Navier-Stokes, continuità, ecc.) non porta a risultati significativi perché i risultati ottenuti sono rappresentativi solo di *quella* configurazione e di nessun'altra anche se infinitamente vicina ad essa.

Conviene allora considerare il fenomeno come aleatorio e condurre una analisi statistica. Ciascuna esperienza che riproduce le stesse condizioni sarà chiamata *realizzazione* dell'esperimento. Come per tutti i fenomeni aleatori le informazioni statistiche connesse con la turbolenza sono ottenute mediando su di un numero molto alto (teoricamente infinito) di realizzazioni.

Esempio: per rilevare la velocità all'uscita di un condotto, alimentato da un ventilatore, può essere utilizzato un anemometro; se indichiamo con t_0 l'istante a partire dal quale si aziona il ventilatore, si ottengono, ripetendo la prova, andamenti sempre differenti (Figura 47).

7.2.1. Media di insieme e media temporale

Supponiamo di ripetere N volte un esperimento e misurando una componente della velocità in un dato punto, \mathbf{x} , e ad un dato istante t , misurato a partire dall'inizio dell'esperimento. Si ottiene così un insieme di valori $u^{(i)}$ di una componente della velocità, con $i=1, \dots, N$.

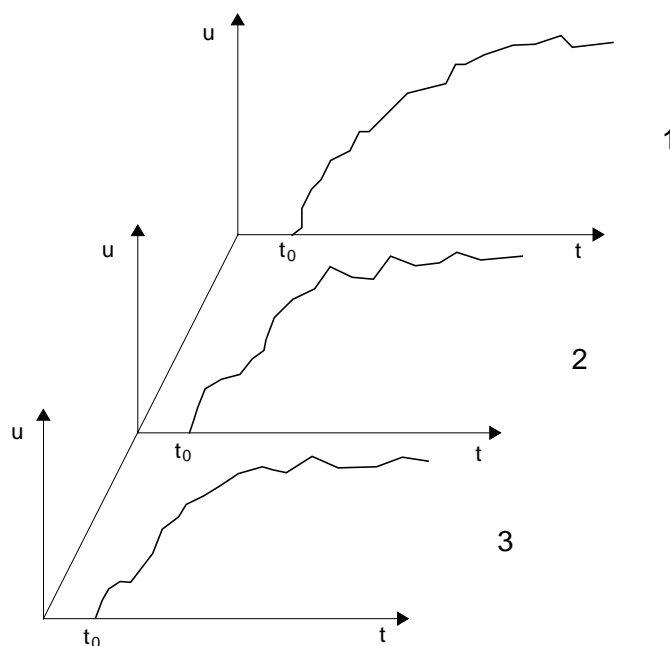


FIGURA 47

La media di insieme di tutti i valori di u nelle diverse realizzazioni al medesimo istante e nel punto \mathbf{x} è data da:

$$\bar{u}(\mathbf{x},t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{u^{(1)} + u^{(2)} + \dots + u^{(N)}}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum u^{(i)}}{N}$$

In un assegnato intervallo temporale, T , la turbolenza è detta stazionaria se le statistiche della turbolenza non dipendono dal tempo; in detto intervallo è possibile definire una media temporale:

$$\hat{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad (351)$$

Il processo è detto *ergodico* se la media di insieme e la media temporale coincidono. Osserviamo infine che l'operatore media statistica è un operatore lineare per cui:

$$\overline{\frac{\partial u}{\partial t}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} ; \quad \overline{\frac{\partial u}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} .$$

7.2.2. Densità di probabilità

Sempre a partire dall'insieme di dati ottenuto dalle N realizzazioni di un esperimento, introduciamo innanzitutto la *funzione di ripartizione*:

$$F(u) = \frac{N_u}{N} \quad (352)$$

dove N_u è il numero di realizzazioni per le quali $u^{(i)} < u$. Data la sua definizione, la funzione di ripartizione è monotona crescente. La funzione densità di probabilità è la data dalla derivata rispetto ad u della funzione di ripartizione:

$$p(u) = \frac{\partial F(u)}{\partial u} \quad (353)$$

ed è tale che il valore $p(u)du$ rappresenta la probabilità che la velocità assuma in una realizzazione un valore compreso tra u ed $u+du$. Per questo motivo, essa può anche essere espressa come:

$$p(u)\Delta u = \lim_{\substack{\Delta u \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \frac{N_{u,\Delta u}}{N} \quad (354)$$

essendo N il numero di prove effettuate ed $N_{u,\Delta u}$ il numero di realizzazioni in cui la velocità assume un valore compreso tra u e $u+\Delta u$.

Per mezzo della densità di probabilità è possibile ricavare la media di insieme:

$$\bar{u} = \int_{-\infty}^{+\infty} up(u)du \quad (355)$$

7.2.3. Momenti di ordine superiore

Le grandezze che caratterizzano il moto turbolento ed in particolare le velocità possono essere decomposte in valore medio e parte fluttuante (*decomposizione di Reynolds*):

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad (356)$$

Per ciascuna componente può essere valutato il momento centrale del secondo ordine (*scarto quadratico medio*):

$$\sigma_i^2 = \overline{u_i'^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \bar{u}_i)^2 \quad (357)$$

avendo indicato con σ_i la *deviazione standard*, ovvero la radice quadrata dello scarto quadratico medio, la quale rappresenta una misura della tipica fluttuazione di velocità attorno al valor medio. Questa quantità può anche essere espressa per mezzo della densità di probabilità come:

$$\overline{u_i'^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} u_i'^2 p(u_i') du_i' = \sigma_i^2 \quad (358)$$

Scelti gli assi coordinati in modo tale che la direzione di $\bar{\mathbf{u}}$ coincida con l'asse x_1 , si definiscono le intensità turbolente longitudinali:

$$\sqrt{\overline{u_1'^2}} / \bar{u} \quad (359)$$

e trasversali:

$$\sqrt{\overline{u_2'^2}} / \bar{u} \quad ; \quad \sqrt{\overline{u_3'^2}} / \bar{u} \quad (360)$$

l'energia cinetica media della turbolenza \bar{e} è data da:

$$\bar{e} = \frac{1}{2} (\overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2}) \quad (361)$$

Considerati i momenti del terzo e quarto ordine:

$$\overline{u'^3} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \bar{u}_i)^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} u'^3 p(u') du' \quad ; \quad \overline{u'^4} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (u_i^{(k)} - \bar{u}_i)^4 = \int_{-\infty}^{+\infty} u'^4 p(u') du'$$

è possibile definire i fattori di forma per la distribuzione di probabilità:

– dissimmetria (*skewness*):

$$S = \overline{u'^3} / \sigma^3 \quad (362)$$

(nullo nel caso di distribuzione simmetrica);

– appiattimento (*kurtosis*):

$$K = \overline{u'^4} / \sigma^4 \quad (363)$$

7.2.4. Correlazioni

Siano u'_i e u'_j le parti fluttuanti delle componenti della velocità in due punti \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 valutate in due istanti t_1 e t_2 ; la *correlazione spazio-temporale* è definita dalla relazione:

$$R_{u_i u_j}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2) = \overline{u'_i(\mathbf{x}_1, t_1) u'_j(\mathbf{x}_2, t_2)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u'_i(\mathbf{x}_1, t_1) u'_j(\mathbf{x}_2, t_2) p(u'_i u'_j) du'_i du'_j \quad (364)$$

essendo $p(u'_i, u'_j)$ la funzione densità di probabilità congiunta; posto:

$$t_1 = t \quad ; \quad t_2 = t + \tau \quad ; \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{x}_2 = \mathbf{x} + \mathbf{r}$$

si indica la correlazione spazio-temporale in forma più sintetica:

$$R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) = R_{u_i u_j}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, t_1, t_2)$$

R_{ij} risulta un tensore del secondo ordine simmetrico.

In modo analogo è possibile definire correlazioni spazio-temporali tra due grandezze scalari (ad esempio pressione e temperatura, la correlazione in questo caso è uno scalare) o tra grandezze scalari e velocità (la correlazione risulta un vettore).

Il coefficiente di correlazione ρ_{ij} è definito dalla relazione:

$$\rho_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, \tau) = \frac{R_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} \quad (365)$$

essendo valida l'ineguaglianza di Schwartz:

$$\overline{u_i u_j} \leq \sqrt{\overline{u_i^2}} \sqrt{\overline{u_j^2}}$$

risulta:

$$-1 \leq \rho_{ij} \leq 1 \quad (366)$$

Le correlazioni spazio-temporali rappresentano la descrizione statistica delle relazioni che legano i fenomeni che accadono in due diversi punti ed in due diversi istanti. In linea di massima valori assoluti più alti del coefficiente di correlazione indicano una relazione di causalità più stretta, mentre valori prossimi allo zero indicano fenomeni che non sono legati tra loro.

Sono introdotte le seguenti definizioni:

- correlazioni spaziali $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t, 0)$, quando le grandezze sono considerate allo stesso istante ($\tau=0$);
- correlazioni temporali $R_{ij}(\mathbf{x}, 0, t, \tau)$, quando le grandezze sono considerate nello stesso punto ($\mathbf{r}=\mathbf{0}$);
- turbolenza statisticamente stazionaria quando la funzione densità di probabilità e quindi la correlazione non dipende dal tempo $R_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, \tau)$;
- turbolenza statisticamente omogenea quando la funzione densità di probabilità e quindi la correlazione non dipende dal punto $R_{ij}(\mathbf{r}, t, \tau)$;
- turbolenza isotropa quando le funzioni di correlazione spaziali non dipendono dalla direzione e quindi solo dal modulo di \mathbf{r} , $R_{ij}(\mathbf{x}, |\mathbf{r}|, t, 0)$.

Se non si fornisce energia ad un flusso turbolento, questo è destinato a ridurre la propria energia cinetica a causa della viscosità che la trasforma in calore e quindi il fenomeno non può ritenersi stazionario. Per introdurre energia nel sistema fluidodinamico è necessario produrre delle disomogeneità spaziali (gradiente di velocità) e quindi il flusso non può più ritenersi né omogeneo né isotropo. Pur non potendosi realizzare una condizione di turbolenza stazionaria, omogenea ed isotropa, ad essa si fa riferimento per studiare in forma più semplice i meccanismi, comunque complessi, che caratterizzano l'evoluzione di un flusso turbolento.

A tale tipo di turbolenza si farà in genere riferimento, pertanto, le correlazioni spazio-temporali sono funzioni di τ e di $|\mathbf{r}|$: $R_{ij}(\mathbf{r}, \tau)$. Risulta:

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = R_{ij}(\mathbf{r}, -\tau); \quad R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = R_{ij}(-\mathbf{r}, \tau)$$

quando le due grandezze che entrano nella definizione di correlazione coincidono, si parla di autocorrelazione (ad esempio stessa componente della velocità in forma più sintetica si caratterizzerà la autocorrelazione con un solo pedice: $R_{ii}=R_i$). In base alle relazioni precedenti risulta che le autocorrelazioni sono funzioni simmetriche rispetto l'origine degli assi.

7.2.5. Spettri di potenza

La descrizione statistica della turbolenza, oltre che nel dominio del tempo e dello spazio attraverso la funzione di correlazione, può avvenire nel dominio della frequenza e dei numeri d'onda attraverso le densità spettrali di potenza che sono legati alle funzioni di correlazione attraverso il teorema di Wiener-Khintchine. Facendo riferimento alla turbolenza stazionaria ed isotropa sono definite le seguenti funzioni ottenute mediante operazioni di trasformata di Fourier della funzione di correlazione:

- densità spettrale di potenza nel dominio dei numeri d'onda:

$$B_{ij}(\mathbf{k}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \quad (367)$$

- densità spettrale di potenza nel dominio della frequenza:

$$P_{ij}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (368)$$

- densità spettrale di potenza nel dominio dei numeri d'onda e delle frequenze:

$$\begin{aligned} E_{ij}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_{ij}(\mathbf{r}, \omega) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \right] e^{-j\omega\tau} d\tau \end{aligned} \quad (369)$$

Le funzioni B_{ij} e P_{ij} sono funzioni ibride in quanto conservano il duplice significato di correlazione e di spettro. È possibile passare da una descrizione spettrale ad una tramite correlazione mediante operazioni di antitrasformazione di Fourier.

7.3. Le scale della turbolenza

L'autocorrelazione temporale ci dà una indicazione di quanto ciò che succede in un dato punto ed in un dato istante influenza ciò che avviene in quel punto dopo un intervallo di tempo τ . Questa informazione può anche essere interpretata come una misura della memoria che il fenomeno ad un certo istante ha di quanto è accaduto un intervallo di tempo τ prima. L'autocorrelazione temporale dà una descrizione analitica per ogni diverso intervallo di tempo τ , a volte è però più utile avere una indicazione globale che, con un numero, dia una misura complessiva della memoria che il fenomeno ha di sé stesso; a tal fine si definiscono le cosiddette scale temporali della turbolenza. Naturalmente è possibile ripetere i ragionamenti sopra esposti anche per le correlazioni spaziali e definire delle analoghe scale spaziali.

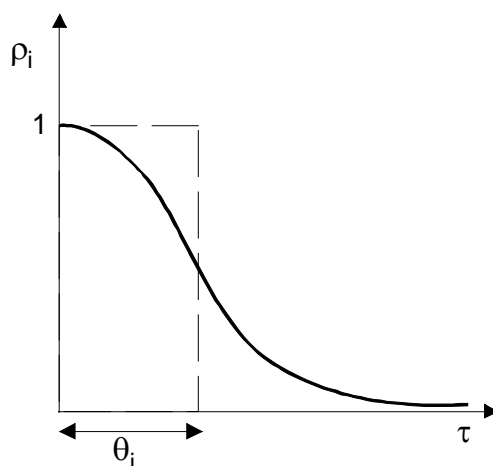


FIGURA 48

7.3.1. Scale integrali

La scala integrale, che può essere sia temporale sia spaziale, fornisce una valutazione globale della memoria che il fenomeno ha di sé stesso tenendo conto di tutte le strutture che costituiscono la turbolenza, sia le più piccole, alle quali corrispondono τ piccoli, sia le più grandi, che incidono su intervalli di tempo maggiori. In Figura 48 è riportato un tipico andamento del coefficiente di autocorrelazione temporale per una componente della velocità. In generale partendo dal valore unitario, il coefficiente di autocorrelazione tende a zero per τ tendente all'infinito.

L'area compresa tra l'autocorrelazione e l'asse delle ascisse è una misura di quanto a lungo il fenomeno rimane correlato; partendo dalle autocorrelazioni temporali, è dunque definita *scala integrale temporale*:

$$\theta_i = \int_0^{+\infty} \rho_i(0, \tau) d\tau \quad (370)$$

In modo schematico si potrebbe dire che il fenomeno è correlato con se stesso per tempi inferiori a θ_i , ed è scorrelato per tempi superiori. Nel caso di rumore bianco si avrebbe $\theta_i = 0$ e nel caso di un flusso laminare si ha che il fenomeno è sempre correlato ($\rho_i = 1$) e la scala integrale risulta essere infinita.

In modo analogo vengono definite le scale integrali spaziali partendo dai coefficienti di correlazione spaziali:

$$L_i \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \int_0^{+\infty} \rho_i(\mathbf{r}, 0) d|\mathbf{r}| \quad (371)$$

Nel caso di turbolenza isotropa non esiste la dipendenza dalla direzione \mathbf{r}/r .

7.3.2. Scala di Taylor

Se si vuole dare una descrizione complessiva del comportamento delle strutture più piccole, ovvero quelle caratterizzate da scale sia spaziali sia temporali piccole, si fa ricorso alla scala di Taylor, ricavata a partire dalla forma della funzione di autocorrelazione nell'origine.

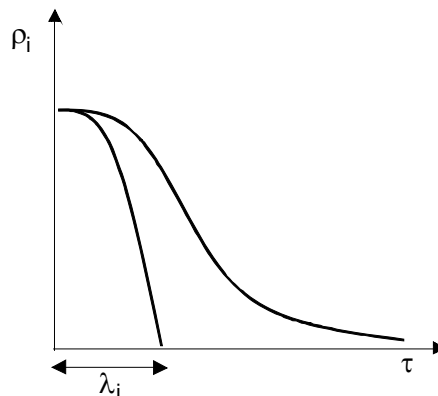


FIGURA 49

Sviluppando in serie di Taylor u'_i , intorno all'origine $\tau=0$, otteniamo:

$$u'_i(\mathbf{x}, t + \tau) = u'_i(\mathbf{x}, t) + \left. \frac{\partial u'_i}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} \tau + \left. \frac{\partial^2 u'_i}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=0} \frac{\tau^2}{2} + \dots$$

Poiché $\frac{\partial u'_i}{\partial \tau} = \frac{\partial u'_i}{\partial t}$ risulta:

$$R_i(0, \tau) = \overline{u'_i(\mathbf{x}, t)u'_i(\mathbf{x}, t + \tau)} = \overline{u'^2_i} + \tau \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} + \frac{\tau^2}{2} \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2}} + \dots$$

se supponiamo il fenomeno stazionario, tutte le derivate temporali delle quantità medie si annullano:

$$\overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \overline{u'^2_i}}{\partial t} = 0$$

ed anche:

$$\frac{\partial^2 \overline{u'^2_i}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(2 \overline{u'_i \frac{\partial u'_i}{\partial t}} \right) = 2 \overline{u'_i \frac{\partial^2 u'_i}{\partial t^2}} + 2 \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} \right)^2} = 0$$

risulta dunque:

$$R_i(0, \tau) = \overline{u'^2_i} - \frac{\tau^2}{2} \overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} \right)^2} + \dots$$

dividendo per la varianza e troncando lo sviluppo al secondo ordine si trova l'equazione della parabola osculatrice al coefficiente di autocorrelazione nell'origine:

$$\rho_i(0, \tau) = 1 - \frac{\tau^2}{\lambda_i^2} \quad (372)$$

essendo λ_i la *scala di Taylor*:

$$\lambda_i^2 = \frac{\overline{2u'^2_i}}{\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial t} \right)^2}} \quad (373)$$

La scala di Taylor è la distanza dall'origine del punto ove la parabola interseca l'asse delle ascisse (Figura 49).

In generale la scala di Taylor è di un ordine di grandezza inferiore alla scala integrale e spesso viene indicata con il nome di microscala della turbolenza.

7.4. Ipotesi di Taylor

L'ipotesi di Taylor, o della turbolenza congelata, afferma che per tempi piccoli (rispetto alle scale caratteristiche) le caratteristiche del moto turbolento non variano. Ciò significa che l'evoluzione in un punto di una grandezza turbolenta è uguale alla evoluzione nello spazio qualora ci si muova con la velocità media del fluido ovvero:

$$u'_i(\mathbf{x}, t + \tau) = u'_i(\mathbf{x} - \mathbf{u} \tau, t) \quad (374)$$

Ciò significa che la derivata sostanziale di una generica grandezza fluttuante è nulla. Da un punto di vista fisico questa ipotesi corrisponde ad assumere che il moto medio non influenzi la struttura della turbolenza, ma abbia semplicemente il ruolo di trasportare tali strutture verso valle.

Utilizzando l'ipotesi di Taylor è possibile passare da correlazioni temporali, facilmente desumibili da storie temporali, a correlazioni spaziali.

7.5. Equazioni per le quantità medie

È già stato messo in evidenza come non abbia senso fisico cercare di effettuare delle prognosi sulla evoluzione delle quantità istantanee che caratterizzano un flusso turbolento a causa della sensibilità alle condizioni iniziali. Ciò nondimeno è possibile scrivere delle equazioni che regolano l'evoluzione delle quantità medie le quali, essendo basate sull'insieme di tutte le possibili condizioni iniziali, non possono più risentire di tale sensibilità: ciò implica che per le quantità medie è possibile fare delle previsioni significative. Per ottenere queste equazioni è necessario considerare le equazioni che regolano il moto, effettuare la decomposizione di Reynolds per tutte le grandezze dipendenti ed effettuare poi la media delle equazioni così ottenute. Considereremo, per semplicità, il caso di fluido incomprimibile immerso in un campo gravitazionale.

7.5.1. Equazione di bilancio della massa

Nel caso di fluido incomprimibile l'equazione di bilancio della massa è:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (375)$$

Operando la decomposizione di Reynolds ed applicando l'operatore di media si ha:

$$\boxed{\frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0} \quad (376)$$

che rappresenta l'equazione di continuità per la parte media. Sottraendo la (376) alla (375), si ottiene un'equazione analoga per la parte fluttuante:

$$\boxed{\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0} \quad (377)$$

7.5.2. Equazione di Reynolds

Applichiamo ora la decomposizione di Reynolds all'equazione che rappresenta il bilancio della quantità di moto, ovvero l'equazione di Cauchy:

$$\rho \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial t} + \rho(\bar{u}_j + u'_j) \frac{\partial(\bar{u}_i + u'_i)}{\partial x_j} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial(\bar{\tau}_{ij} + \tau'_{ij})}{\partial x_j}$$

sviluppando il prodotto, mediando e tenendo conto della linearità dell'operatore di media:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} + \rho \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho \bar{u}'_j \frac{\partial \bar{u}'_i}{\partial x_j} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{\tau}'_{ij}}{\partial x_j}.$$

Per definizione di parte fluttuante, per ogni grandezza $a = \bar{a} + a'$, si ha $\overline{a'} = 0$, inoltre le quantità già mediate possono essere raccolte a fattor comune nell'operare una media di insieme, quindi $\overline{a'b} = \bar{a}' \cdot \bar{b} = 0$, l'equazione si riduce di conseguenza a:

$$\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \rho \overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j}.$$

inoltre si ha:

$$\overline{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} - \overline{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}};$$

ma, per l'equazione di bilancio della massa per la parte fluttuante, l'ultimo termine è nullo. L'effetto della turbolenza sul moto medio può essere rappresentato quindi per mezzo di un tensore, detto *tensore di Reynolds*:

$$\boxed{(\tau_R)_{ij} = -\rho \overline{u'_i u'_j}}. \quad (378)$$

L'equazione di Cauchy mediata diventa:

$$\boxed{\rho \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -\gamma \frac{\partial z}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{Rij}}{\partial x_j}}. \quad (379)$$

Il ruolo svolto dal tensore di Reynolds è formalmente identico a quello svolto dal tensore degli sforzi viscosi, anche se esso non dipende soltanto dalle caratteristiche del fluido come quest'ultimo, ma da quelle della turbolenza e, in ultima analisi, dal flusso stesso. In ogni caso, grazie a questa analogia formale, l'effetto della turbolenza viene rappresentato spesso come quello di uno stato tensionale aggiuntivo a quello effettivamente esistente ed il tensore sopra definito viene detto tensore degli sforzi turbolenti. In questa interpretazione, l'equazione per il moto diventa formalmente identica a quella per il moto istantaneo introducendo un sforzo totale pari alla somma degli sforzi viscosi e quelli turbolenti: $\underline{\tau}_T = \underline{\tau} + \underline{\tau}_R$.

Sostituendo le equazioni costitutive per un fluido incomprimibile mediate,

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right)$$

nella (379), ed introducendo il carico piezometrico otteniamo l'equazione di Navier-Stokes per il moto turbolento, altrimenti detta *equazione di Reynolds*:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \overline{u'_i u'_j} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}}. \quad (380)$$

nella quale h , al solito, rappresenta il carico piezometrico. Utilizzando la decomposizione di Reynolds si rinuncia a prevedere cosa accade nella singola realizzazione di un esperimento per ottenere delle equazioni prognostiche per le quantità medie che, per loro natura, non risentono delle condizioni iniziali; in questo modo, tuttavia, si hanno a disposizione 4 equazioni (3 di Reynolds + 1 di continuità) mentre le incognite sono ora 10: 1 per la pressione media, 3 per la velocità media, e 6

per le componenti del tensore simmetrico τ_R . Il problema così posto non è perciò determinato, sarà necessario individuare altre 6 equazioni che permettano di chiudere il sistema.

7.6. Ipotesi di Boussinesque

Gli effetti della turbolenza possono in qualche misura essere descritti con meccanismo simile a quello con cui agisce la viscosità. Supponiamo di avere due strati di fluido separati da una superficie piana che si muovono con differenti velocità medie parallele alla superficie di separazione. In presenza della turbolenza alcune particelle vengono scambiate tra i due strati provocando un rallentamento dello strato più veloce ed un'accelerazione dello strato più lento. In definitiva alla superficie di separazione è come si avesse uno sforzo di taglio direttamente proporzionale alla differenza di velocità tra i due strati ed inversamente proporzionale alla distanza in cui tale differenza si manifesta.

In analogia con le equazioni costitutive per gli sforzi viscosi e sulla base di quanto osservato in precedenza, Boussinesque ha proposto di assumere che il tensore di Reynolds sia legato alla parte simmetrica del gradiente di velocità media attraverso un *coefficiente di viscosità turbolenta*, ν_T :

$$\boxed{-\overline{u'_i u'_j} = \nu_T \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) = 2\nu_T \bar{e}_{ij}} \quad (381)$$

Una sostanziale differenza tra sforzi viscosi e quelli turbolenti è legata al fatto che mentre ν è una caratteristica del fluido, ν_T , oltre che dal fluido, dipende anche dal campo di velocità. Il coefficiente di viscosità turbolenta aumenta allontanandosi dalla parete per cui in prossimità della parete gli sforzi viscosi sono predominati ($\nu \gg \nu_T$); lontano dalla parete sono predominanti gli sforzi turbolenti ($\nu \ll \nu_T$).

Con questa ipotesi, l'equazione di Reynolds per la parte media si può riscrivere:

$$\boxed{\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_i} + (\nu + \nu_T) \frac{\partial^2 \bar{u}_i}{\partial x_j^2}}$$

L'ipotesi di Boussinesque, tuttora ampiamente utilizzata, non risulta completamente fondata:

- lo schema proposto vale solo per alcuni tipi di turbolenza, per esempio quella generata in prossimità di una parete lambita da un fluido, ma non in altri, come nel caso della convezione turbolenta;
- le direzioni principali del tensore di Reynolds non coincidono con quelle del tensore velocità di deformazione;
- misure sperimentali evidenziano casi nei quali lo sforzo di taglio turbolento è massimo lì dove non si hanno gradienti di velocità;

Infine questa ipotesi è incongruente da un punto di vista energetico: ponendo $i = j$ nella espressione (381), si ha:

$$-\overline{u_1'^2} = 2\nu_T \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1}; \quad -\overline{u_2'^2} = 2\nu_T \frac{\partial \bar{u}_2}{\partial x_2}; \quad -\overline{u_3'^2} = 2\nu_T \frac{\partial \bar{u}_3}{\partial x_3}$$

quindi, tenendo conto dell'equazione di bilancio della massa, si avrebbe un moto turbolento con energia cinetica della turbolenza nulla:

$$\bar{e} = \overline{u_1'^2} + \overline{u_2'^2} + \overline{u_3'^2} = 0,$$

risultato che conduce alla contraddittoria conclusione che il flusso sia laminare.

7.7. Equazioni globali per i flussi turbolenti

7.7.1. Conservazione della massa

Si vuole trovare una forma dell'equazione globale di conservazione della massa che permetta di fare previsioni per le quantità medie. Consideriamo un fluido barotropico ed ipotizziamo che, essendo esso debolmente comprimibile, la densità sia funzione della sola pressione media:

$$\rho = \rho(\bar{p}) \quad (382)$$

o, che è lo stesso, che le fluttuazioni di densità dovute alle fluttuazioni di pressione siano trascurabili. Per scrivere l'equazione cercata consideriamo l'equazione globale in termini delle quantità istantanee, decomponiamo secondo Reynolds e mediamo l'espressione così ottenuta.

Il principio di conservazione della massa (131), operando la decomposizione di Reynolds e mediando si scrive:

$$\overline{\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV} + \overline{\int_S \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{n} dS} = 0$$

la quale, ricordando che la media dei termini fluttuanti è nulla e che $\bar{\rho} = \rho$ per l'ipotesi (382), diventa:

$$\int_{V_c} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_S \rho \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (383)$$

la quale, in analogia con la sua versione per le quantità istantanee può essere scritta in forma analoga alla (132):

$$\boxed{\frac{\partial \bar{m}}{\partial t} + \bar{\phi}_m = 0}. \quad (384)$$

Questa è la forma dell'equazione globale di conservazione della massa scritta per i flussi turbolenti.

7.7.2. Bilancio della quantità di moto

Seguiamo, per il bilancio della quantità di moto, la stessa procedura descritta nel paragrafo precedente. Consideriamo l'equazione globale (143), mediamola

$$\bar{\mathbf{I}} + \bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{\Pi}} + \bar{\mathbf{G}}$$

e consideriamo i termini uno ad uno.

L'inerzia locale è:

$$\bar{\mathbf{I}} = \overline{\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') dV} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{u}} dV = \mathbf{I}$$

che ha la stessa forma di quella scritta per il moto istantaneo anche se vi compare la velocità media.

Il flusso medio di quantità di moto è:

$$\bar{\mathbf{M}} = \overline{\int_{S_c} \rho(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}')(\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{ndS}} = \int_{S_c} (\rho \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{ndS} + \int_{S_c} \rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \cdot \mathbf{ndS}$$

ed è quindi determinato da due componenti: un flusso dovuto al moto medio, che corrisponde al primo termine dell'ultimo membro, ed un flusso dovuto alle fluttuazioni turbolente, che corrisponde al secondo termine. Indichiamo con $\mathbf{M} = \int_{S_c} (\rho \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{ndS}$ il flusso dovuto al moto medio, e con:

$$\Pi_R = - \int_{S_c} \rho \overline{\mathbf{u}'\mathbf{u}'} \cdot \mathbf{ndS} = \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}}_R \cdot \mathbf{ndS} \quad (385)$$

il flusso dovuto alle fluttuazioni turbolente, che può essere letto come risultante degli sforzi turbolenti sulla superficie del volume di controllo. Si ha dunque:

$$\bar{\mathbf{M}} = \mathbf{M} - \Pi_R .$$

Le forze di superficie sono:

$$\bar{\Pi} = \overline{\int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}'}) \cdot \mathbf{ndS}} = \int_{S_c} \underline{\underline{\tau}} \cdot \mathbf{ndS}$$

e raggruppandole con la risultante degli sforzi turbolenti possiamo definire una *risultante degli sforzi totali*:

$$\Pi_T = \bar{\Pi} + \Pi_R = \int_{S_c} (\underline{\underline{\tau}} + \underline{\underline{\tau}}_R) \cdot \mathbf{ndS} . \quad (386)$$

Le forze di volume sono:

$$\bar{\mathbf{G}} = \overline{\int_{V_c} \rho(\bar{\mathbf{f}} + \mathbf{f}') dV} = \int_{V_c} \rho \bar{\mathbf{f}} dV = \mathbf{G} .$$

Riunendo i risultati sin qui raggiunti nell'equazione globale ne otteniamo la forma per i moti turbolenti:

$$\boxed{\mathbf{I} + \mathbf{M} = \Pi_T + \mathbf{G}} \quad (387)$$

8. STRATO LIMITE TURBOLENTO

8.1. Scabrezza equivalente

Riprendiamo il ragionamento sullo strato limite su di una lastra piana iniziato nel capitolo precedente.

Finora abbiamo ipotizzato che le superfici considerate fossero lisce. In realtà non è così, nel senso in cui ogni superficie sia caratterizzata da una scabrezza che può essere omogenea o casuale. In caso di scabrezza omogenea una grandezza scala è evidentemente la sua altezza ε .

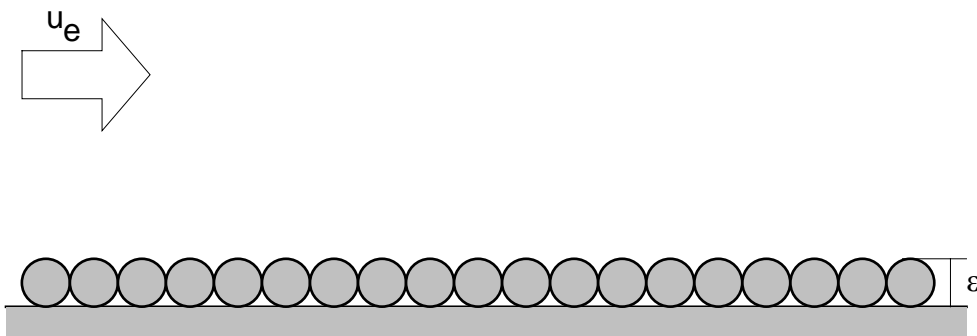


FIGURA 50

In caso di scabrezza casuale la scala non è più definibile in modo univoco; anche se scegliessimo come altezza caratteristica delle asperità la loro altezza media, avremmo a che fare con una grandezza che, di fatto, non è misurabile. Fissiamo allora come scala l'altezza ε_e , definita come l'altezza di una scabrezza omogenea che, per R_e molto grandi, offre una resistenza al moto, τ_{0e} , (e quindi una dissipazione) pari a quella, $\tau_{0\varepsilon}$, offerta dalla scabrezza non omogenea considerata:

$$\tau_{0\varepsilon} = \tau_{0e}.$$

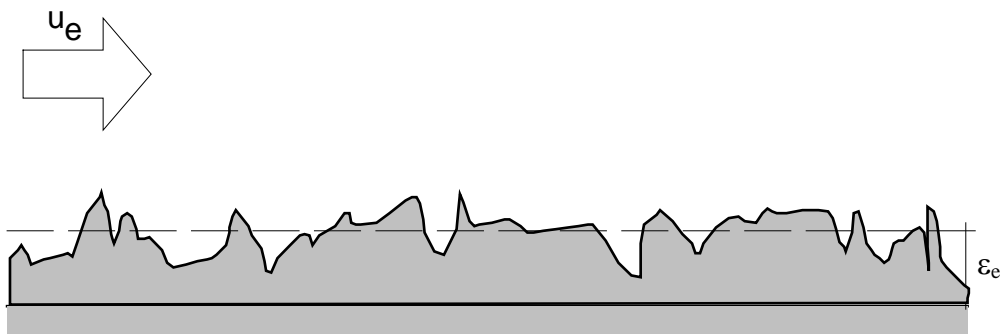


FIGURA 51

8.2. Transizione dello strato limite

Analizziamo il comportamento di un flusso uniforme che viene in contatto con una parete scabra.

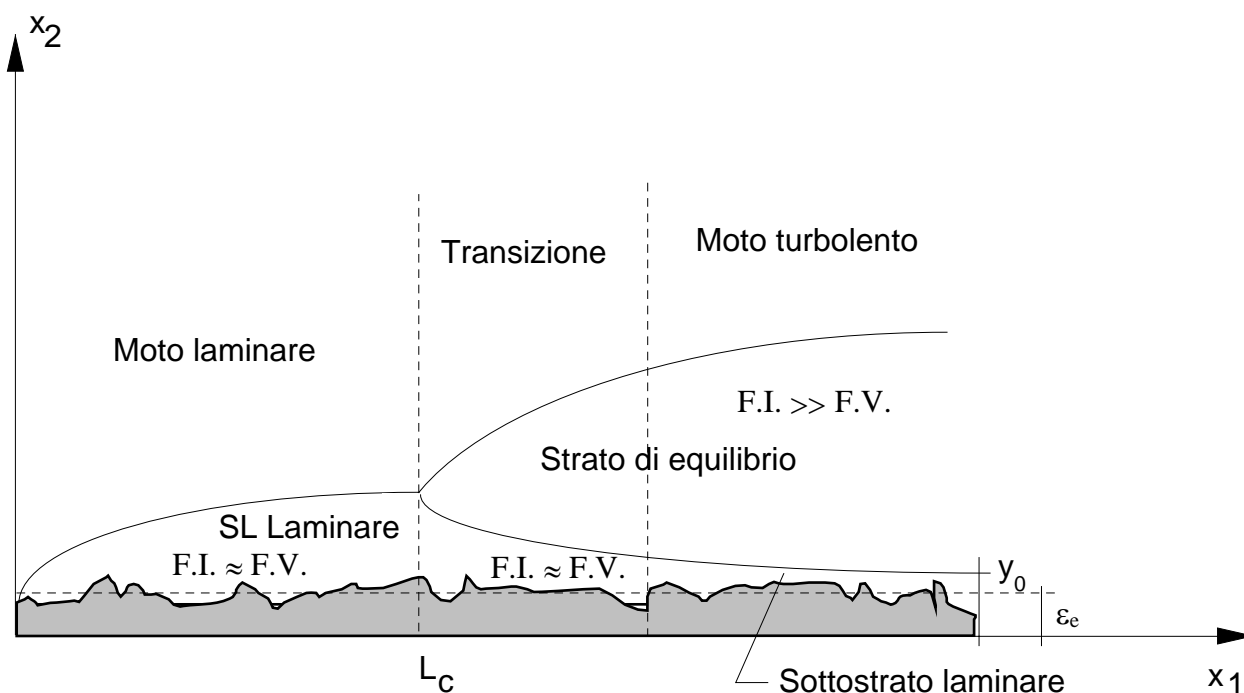


FIGURA 52

Abbiamo visto nel capitolo 6. che lo strato limite nasce all'attacco della parete e comincia ad aumentare di spessore proporzionalmente a $\sqrt{x_1}$. In questa regione, il moto all'interno dello strato limite risulta laminare, ed eventuali disturbi non si propagano, ma si estinguono immediatamente per effetto delle forze viscosse, che risultano dello stesso ordine di grandezza di quelle d'inerzia. La zona appena descritta prende il nome di *strato limite laminare*. All'aumentare di x_1 il numero di Reynolds, $R_e = Ux_1/\nu$, cresce, quindi le forze di inerzia diventano preponderanti rispetto a quelle viscosse ed il flusso diventa turbolento. La transizione tra un tipo di flusso e l'altro avviene per un R_e critico, R_{ec} , il cui valore è stato trovato sperimentalmente essere $R_{ec} = 465$.

Oltre questo punto il flusso diventa instabile originando due differenti strati che costituiscono lo *strato limite turbolento*. Queste due zone prendono il nome di *strato di equilibrio* e *sottostrato laminare*.

Lo strato di equilibrio è caratterizzato da un moto turbolento, nel quale i disturbi indotti si propagano in maniera imprevedibile in quanto le forze d'inerzia risultano molto maggiori di quelle viscosse ($R_e \gg 1$). Il sottostrato laminare è, invece, una zona in cui le forze di inerzia sono ancora dello stesso ordine di grandezza di quelle viscosse ed il moto risulta laminare. Lo spessore di questo strato, che sarà indicato con y_0 , è solitamente molto piccolo e, a differenza dello spessore dello strato limite laminare, il suo spessore non dipende da x_1 .

Dal punto di vista dello strato di equilibrio possiamo distinguere due situazioni in funzione del rapporto tra l'altezza del sottostrato laminare, y_0 , e quella della scabrezza, ϵ_e :

$y_0 > \epsilon_e$: in tal caso la scabrezza non influenza lo strato di equilibrio, la parete si dice *fluidodinamicamente liscia*;

$y_0 < \epsilon_e$: in tal caso la scabrezza influenza tutto lo strato limite, la parete si dice *fluidodinamicamente scabra*.

Se lo strato limite è generato all'interno di un condotto, dopo una fase iniziale in cui lo sviluppo non differisce da quello descritto sinora, esso interagisce con quello che si è generato sulla parete opposta. Esaminiamo, per semplicità il caso di un condotto bidimensionale delimitato da due pareti piane infinitamente estese. Possono verificarsi due situazioni differenti: nel primo caso i due strati si incontrano ad una distanza dall'imbocco L_i inferiore alla distanza critica L_c : i due strati si incontrano quando sono ancora laminari e si raccordano tra loro. All'interno del condotto si crea un flusso laminare uniforme, il profilo di velocità in una generica sezione è di tipo parabolico e tale rimane all'aumentare di x_1 (Figura 53).

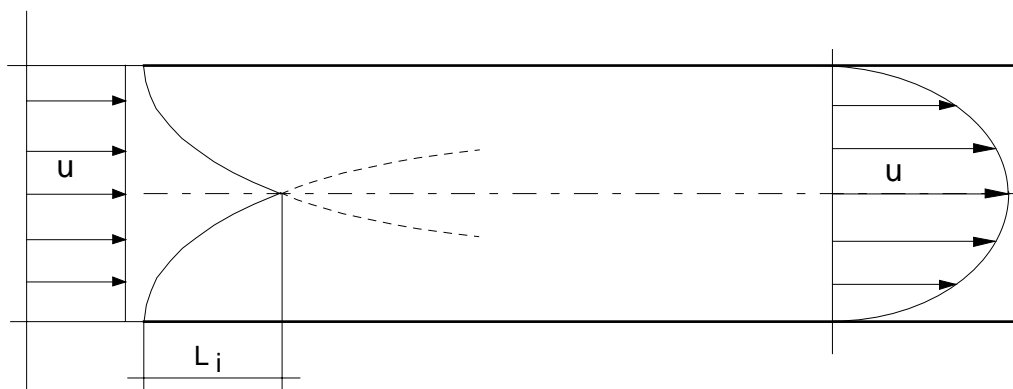


FIGURA 53

Nel secondo caso invece, i due strati limite interagiscono ad una distanza, L_i , maggiore della distanza critica L_c , alla quale avviene la transizione a strato limite turbolento. Si generano quindi un sottostrato laminare ed uno strato di equilibrio in modo analogo a quanto descritto precedentemente. Nella parte centrale invece, l'interazione dei due strati porta alla generazione di una zona di raccordo che viene chiamata *nucleo*.

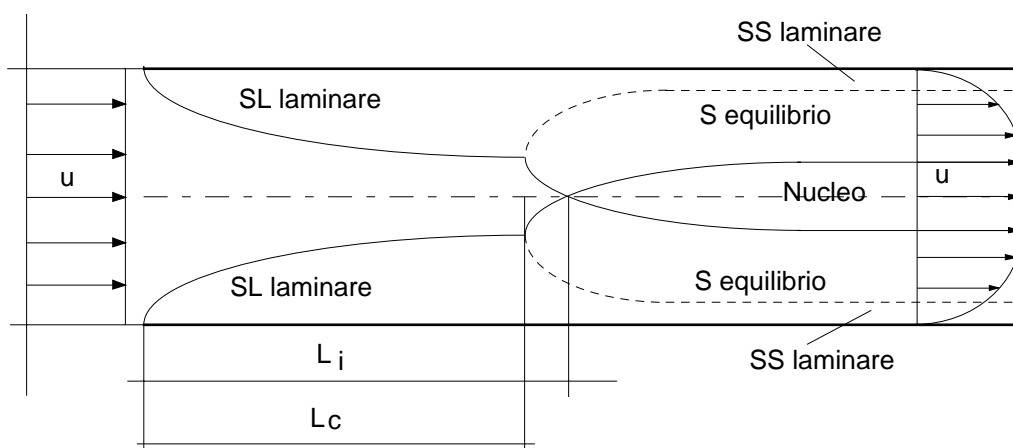


FIGURA 54

8.3. Equazioni per lo strato limite turbolento

8.3.1. Andamento della piezometrica

Scriviamo l'equazione di Reynolds per lo strato limite turbolento che si sviluppa in un condotto, nella zona lontana dall'imbocco, ove il flusso si è completamente sviluppato. L'asse x_1 sarà, al solito, orientato nella direzione della velocità media; inoltre si suppone il problema stazionario.

Essendo la turbolenza completamente sviluppata, le sue caratteristiche non dipenderanno più da x_1 . Avremo quindi che:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \bar{u}_1(x_2, x_3); && \text{Flusso completamente sviluppato} \\ \bar{u}_2 &= \bar{u}_3 = 0; && \text{Orientazione asse } x_1 \\ \frac{\partial \bar{a}}{\partial t} &= 0; && \text{Stazionarietà} \end{aligned}$$

con a una generica grandezza fisica. L'ipotesi di flusso completamente sviluppato comporta inoltre che tutte le caratteristiche della turbolenza, ed in particolare gli sforzi di Reynolds, non dipendano dalla x_1 . Le condizioni al contorno impongono che la velocità si annulli alle pareti (Figura 55).

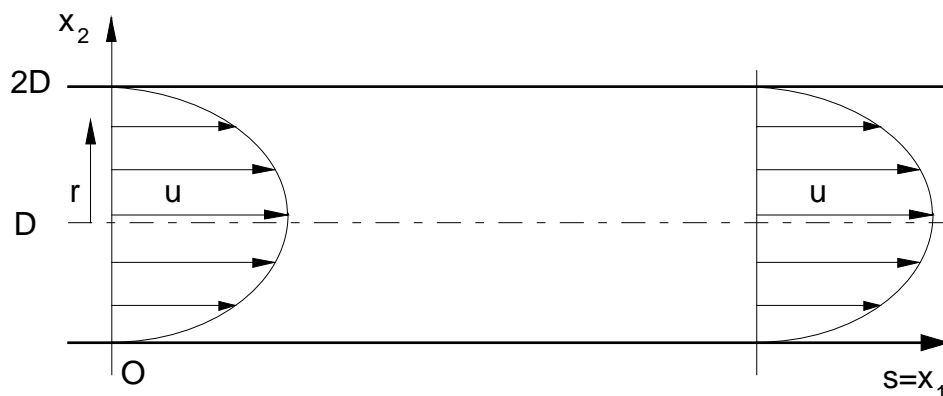


FIGURA 55

L'equazione di continuità sotto queste ipotesi si riduce a:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_1} = 0. \quad (388)$$

L'equazione di Reynolds (380) proiettata lungo l'asse x_1 alla luce di queste ipotesi si scrive:

$$g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} = v \left(\frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}_1}{\partial x_3^2} \right) - \frac{\partial \overline{u_1' u_2'}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_1' u_3'}}{\partial x_3}, \quad (389)$$

e proiettata lungo x_2 ed x_3 :

$$\begin{cases} g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_2} = - \frac{\partial \overline{u_2'^2}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_2' u_3'}}{\partial x_3} \\ g \frac{\partial \bar{h}}{\partial x_3} = - \frac{\partial \overline{u_2' u_3'}}{\partial x_2} - \frac{\partial \overline{u_3'^2}}{\partial x_3} \end{cases} \quad (390)$$

Il secondo membro di queste equazioni è, per l'ipotesi di turbolenza completamente sviluppata, indipendente da x_1 . Integriamo la prima di queste rispetto ad x_2 :

$$g \bar{h} = -\overline{u_2'^2} + F(x_2, x_3) + C(x_1, x_3);$$

nella quale $F(x_2, x_3)$ rappresenta l'integrale del secondo termine del secondo membro e $C(x_1, x_3)$ è una generica funzione che dipende dalle condizioni al contorno. Derivando rispetto a x_1 si ottiene:

$$\bar{i} = -\frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} = -\frac{1}{g} \frac{\partial C(x_1, x_3)}{\partial x_1}, \quad (391)$$

la quale indica che la pendenza piezometrica media è funzione delle sole x_1 ed x_3 . D'altra parte integrando la seconda equazione rispetto ad x_3 si ricava, in analogia con quanto visto prima, che la pendenza piezometrica media è funzione di x_1 ed x_2 . L'unico modo in cui queste due affermazioni possono essere contemporaneamente vere è che essa sia funzione della sola x_1 :

$$\boxed{\bar{i} = \bar{i}(x_1)} \quad (392)$$

È importante osservare che le equazioni (390) mettono in luce il fatto che il carico piezometrico medio non è costante sui piani ortogonali al moto, al contrario di quanto è stato dimostrato sia per i flussi paralleli sia per lo strato limite laminare, che sono gli altri flussi unidirezionali studiati finora. Rimane comunque costante su queste sezioni la pendenza piezometrica media.

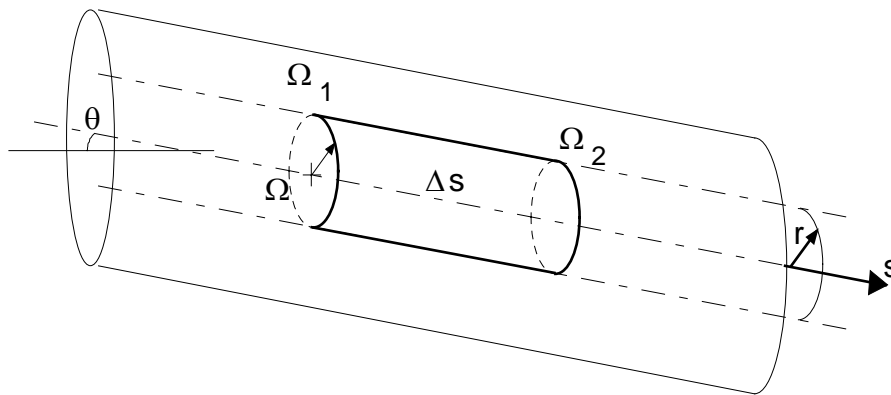


FIGURA 56

8.3.2. Stato di tensione

Applichiamo, ad un volume cilindrico di raggio r e coassiale con la condotta, l'equazione globale della quantità di moto scritta per il caso turbolento (387), proiettiamola lungo l'asse,

$$I_s + M_s = II_s + G_s \quad (393)$$

e consideriamo i singoli termini (Figura 56). L'inerzia locale, I_s è nulla poiché il problema è stazionario. Il flusso di quantità di moto dovuto al moto medio è nullo perché, a causa della omogeneità il flusso entrante attraverso la superficie Ω_1 è uguale a quello uscente attraverso la superficie Ω_2 . Devono quindi equilibrarsi le forze di superficie e quelle di volume. Valutiamo innanzitutto lo stato di tensione totale nel fluido in un sistema di coordinate cilindriche nelle quali r indica la componente radiale ed s quella assiale:

$$\begin{cases} \tau_{Tss} = \tau_{ss} + \tau_{Rss} = -\bar{p} + 2\mu \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial s} - \overline{\rho u'_s u'_s} \\ \tau_{Trs} = \tau_{rs} + \tau_{Rrs} = \mu \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \overline{\rho u'_r u'_s} \end{cases} \quad (394)$$

e consideriamo singolarmente i contributi sulle superfici Ω_1 , Ω_2 e Ω_L :

su Ω_1 :

$$\Pi_1 = \left(p - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \overline{\rho u'_s u'_s} d\Omega \right) \pi r^2,$$

con $p = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{p} dS$, pressione media sulla sezione;

su Ω_2 :

$$\Pi_2 = \left[- \left(p - \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \overline{\rho u'_s u'_s} d\Omega \right) - \frac{\partial p}{\partial s} \Delta s \right] \pi r^2,$$

avendo sviluppato secondo Taylor ed avendo tenuto conto del fatto che, essendo il fenomeno statisticamente omogeneo, lo sforzo turbolento non può dipendere da s ;

su Ω_L :

$$\Pi_L = \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \overline{\rho u'_r u'_s} \right) B \Delta s = \tau_{Trs} 2\pi r \Delta s;$$

per cui la risultante dei termini di superficie è:

$$II_s = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_L = -\frac{\partial p}{\partial s} \Delta s \pi r^2 + 2\pi r \Delta s \tau_{Trs}.$$

Se indichiamo con θ l'angolo che l'asse della condotta forma con l'orizzontale e con Δz la variazione di quota di tale asse nel tratto Δs , la componente delle forze gravitazionali, proiettata sull'asse può essere scritta:

$$G_s = \gamma \pi r^2 \Delta s \text{ sen } \theta = -\gamma \pi r^2 \Delta z = -\gamma \pi r^2 \frac{\partial z}{\partial s} \Delta s,$$

e sostituendo tutti questi contributi nell'equazione globale otteniamo infine:

$$-\frac{\partial p}{\partial s} \pi r^2 \Delta s + \tau_{Trs} 2\pi r \Delta s - \gamma \pi r^2 \Delta s \frac{\partial z}{\partial s} = 0$$

raccogliendo i termini che rappresentano il carico piezometrico, h ,

$$-\gamma \frac{\partial h}{\partial s} \pi r^2 \Delta s + \tau_{Trs} 2\pi r \Delta s = 0$$

introducendo la pendenza piezometrica, i , e ricavando lo sforzo totale di taglio si ottiene:

$$\boxed{\tau_{Trs} = -\frac{r}{2} \gamma \bar{i}}. \quad (395)$$

la quale conferma, analogamente a quanto era stato ricavato nel caso del flusso laminare tra due lastre piane, che lo sforzo di taglio varia linearmente all'interno della condotta e si annulla sull'asse.

Valutiamo questa equazione per un volume di controllo tale che la sezione Ω comprenda l'intero flusso: $r = R$. Se indichiamo con $-\tau_0$ lo sforzo alla parete (che avrà carattere solo viscoso):

$$\boxed{\tau_0 = -\frac{R}{2} \gamma \bar{i}}; \quad (396)$$

sostituendo questa equazione nella precedente, ed utilizzando l'espressione estesa di τ_{Trs} otteniamo:

$$v \frac{\partial \bar{u}_s}{\partial r} - \overline{u'_s u'_r} = \frac{-\tau_0}{\rho} \frac{r}{R}.$$

Per discutere questa equazione che, come vedremo, fornisce molte informazioni sulla struttura dello strato limite, conviene ora cambiare sistema di riferimento, assumendo una ascissa x_1 nella direzione dell'asse, ed una ascissa $x_2 = (R - r)$, che si annulla alla parete del condotto ed ha il verso positivo verso il centro. Questo si rende necessario poiché si vuole indagare cosa succede in prossimità della parete ed un sistema di riferimento con l'origine al centro del condotto non sarebbe appropriato. Sostituendo*, otteniamo l'equazione dello strato limite nella forma cercata:

$$\boxed{v \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} - \overline{u'_1 u'_2} = \frac{\tau_0}{\rho} \left(1 - \frac{x_2}{R} \right)} \quad (397)$$

Questa equazione descrive l'andamento degli sforzi totali, $\tau_t = \tau + \tau_R$, in un condotto, infatti il primo termine a primo membro rappresenta gli sforzi viscosi divisi per la densità, τ/ρ , mentre il secondo termine rappresenta gli sforzi di Reynolds, divisi per la densità, τ_R/ρ ; essa può essere riscritta:

$$\boxed{\frac{\tau_t}{\tau_0} = \left(1 - \frac{x_2}{R} \right)} \quad (398)$$

Per discutere la (397) in dettaglio conviene scriverla in forma adimensionale. Prima di tutto è necessario introdurre delle grandezze scala appropriate. Delle grandezze che influenzano il problema sono sicuramente ρ e μ , ma, non è individuabile in modo univoco una velocità che caratterizzi il moto in tutti i sottostrati che compongono lo strato limite. Facciamo, allora, riferimento ad una grandezza che siamo in grado di misurare: lo sforzo tangenziale alla parete, τ_0 . In base a questa possiamo definire una scala delle velocità che soddisfi la relazione:

$$\tau_0 = \tau_0^* \rho u_*^2,$$

imponendo che lo stato di tensione adimensionale sia unitario: $\tau_0^* = 1$. Risulta quindi:

$$\boxed{u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}} \quad (399)$$

che è detta *velocità d'attrito*. La scala delle lunghezze appropriata dipende invece da quale stiamo considerando: nel nucleo sarà adatta la dimensione del condotto R , mentre nel sottostrato laminare, che è molto sottile rispetto al condotto, è necessario ricorrere ad una scala definita in base agli effetti di parete: v / u_* . Il rapporto tra le due scale delle lunghezze è:

$$\boxed{\frac{R u_*}{v} = R_{e*}} \quad (400)$$

* Nella sostituzione bisogna osservare che, per il cambiamento di verso che si ha passando da r ad x_2 , si ha: $\partial(\cdot) / \partial r = - \partial(\cdot) / \partial x_2$ e $u'_r = - u'_2$.

ovvero il numero di Reynolds costruito con la velocità d'attrito, ed è anche il gruppo adimensionale che descrive il fenomeno. Essendo lo spessore del nucleo molto maggiore di quello del sottostrato laminare dovrà essere $R_{e*} \gg 1$.

8.4. Sottostrato laminare

Se la parete è fluidodinamicamente liscia, in prossimità della parete si sviluppa uno strato nel quale gli effetti viscosi prevalgono su quelli turbolenti. Scelta la scala delle lunghezze $l^+ = \nu/u_*$ ed indicata con $y^+ = x_2 u_* / \nu$, la distanza dalla parete adimensionalizzata, l'equazione (397) può essere riscritta:

$$\frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial y^+} - \overline{u_1' u_2'^*} = 1 - \frac{y^+}{R_{e*}} \approx 1 \quad (401)$$

essendo $R_{e*} \gg 1$. Se, inoltre ipotizziamo che essendo il sottostrato laminare, gli sforzi di Reynolds siano trascurabili rispetto a quelli viscosi, si ottiene:

$$\frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial y^+} = \frac{\tau}{\tau_0} \approx 1$$

la quale ci permette di concludere che gli sforzi viscosi sono costanti nel sottostrato laminare. Inoltre, integrandola lungo y^+ , si ottiene l'equazione del profilo di velocità:

$$\bar{u}_1^* = \frac{\bar{u}_1}{u_*} = y^+ \quad (402)$$

che risulta lineare.

8.5. Nucleo

Questa volta deve essere scelta come scala delle lunghezze la dimensione caratteristica del condotto $D = 2R$. Indichiamo quindi la distanza dalla parete adimensionalizzata con $\eta = x_2 / D$. L'equazione (397) diventa quindi:

$$\frac{1}{R_{e*}} \frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial \eta} - \overline{u_1' u_2'^*} = 1 - 2\eta \quad (403)$$

la quale, essendo $R_{e*} \gg 1$, indica che gli sforzi viscosi nel nucleo sono trascurabili rispetto a quelli turbolenti. Per conoscere l'andamento degli sforzi totali è sufficiente far riferimento alla (398) la quale è già adimensionale ed espressa in termini della variabile η : questa equazione indica che l'andamento dello sforzo totale, lungo ciascuna sezione del condotto, è lineare come indicato in Figura 57.

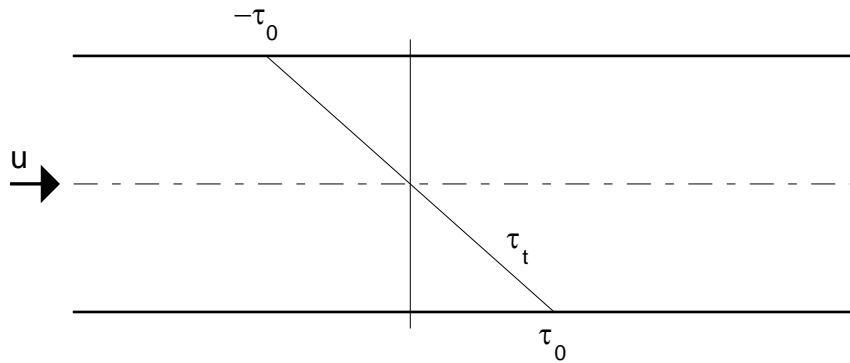


FIGURA 57

8.6. Strato di equilibrio

Si è già osservato che il rapporto tra l'altezza del nucleo e quella del sottostrato laminare è proprio il numero di Reynolds R_{e*} . Se questo numero è abbastanza grande esiste una zona intermedia tra i due strati nella quale vale contemporaneamente: $\eta \ll 1$ e $y^+ \gg 1$. In questa zona, detta *strato di equilibrio*, nessuna delle due scale è appropriata, dovranno invece raccordarsi i profili di velocità presenti nei due strati. Nel sottostrato laminare, date le scale scelte, il profilo di velocità adimensionale deve avere la forma:

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = f(y^+); \quad (404)$$

avendo indicato con f una funzione adimensionale. Nel nucleo, invece, la u_* non è una buona scala per la velocità media perché quest'ultima è troppo grande. Convienne allora adimensionalizzare lo scarto di velocità rispetto a quella massima, u_0 , assunta al centro del condotto:

$$\frac{\bar{u}_1 - u_0}{u_*} = g(\eta). \quad (405)$$

Nello strato di equilibrio i due profili e le loro inclinazioni debbono raccordarsi, quindi la:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \frac{1}{u_*} = \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+} \frac{\partial y^+}{\partial x_2} = \frac{u_*}{v} \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+}$$

dovrà coincidere con la:

$$\frac{\partial \bar{u}_1}{\partial x_2} \frac{1}{u_*} = \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x_2} = \frac{1}{D} \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta}.$$

Uguagliando e moltiplicando per x_2 entrambi i membri si ottiene:

$$y^+ \frac{\partial f(y^+)}{\partial y^+} = \eta \frac{\partial g(\eta)}{\partial \eta}; \quad (406)$$

il primo membro di questa equazione è funzione della sola y^+ , mentre il secondo membro è funzione della sola η : l'unica possibilità affinché l'uguaglianza sia verificata nello strato di equilibrio è che entrambe le espressioni siano costanti. Non comparando nelle espressioni alcun gruppo adimensionale, la costante che devono uguagliare entrambi i membri, è indipendente dalle particolari condizioni nelle quali ci si pone. Essa è indicata con $1/\kappa$, dove κ è detta *costante di von Kármán* ed il suo valore è stato ricavato sperimentalmente: $\kappa = 0.41$.

Abbiamo quindi due equazioni differenziali per f e g che integrate danno:

$$\begin{cases} f(y^+) = \frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + \text{cost.} \\ g(\eta) = \frac{\bar{u}_1 - u_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(\eta) + \text{cost.} \end{cases} \quad (407)$$

Nel caso di condotto circolare, le costanti di integrazione sono state determinate mediante esperimenti di laboratorio e danno luogo alle leggi:

$$\begin{cases} \frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + 5 \\ \frac{\bar{u}_1 - u_0}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln(\eta) - 1 \end{cases} \quad (408)$$

8.7. Pareti fluidodinamicamente scabre

Si è già detto che l'influenza della scabrezza delle pareti si valuta attraverso il rapporto tra la scabrezza equivalente, ε_e , e l'altezza caratteristica del sottostrato laminare, l^+ . Tale rapporto ha la forma di un numero di Reynolds:

$$R_{e\varepsilon} = \frac{\varepsilon_e u_*}{\nu} \quad (409)$$

Misure sperimentali hanno consentito di determinare i campi di variazione del parametro adimensionale nei quali valgono i diversi regimi:

- $R_{e\varepsilon} < 5$: parete fluidodinamicamente liscia;
- $5 < R_{e\varepsilon} < 70$: transizione;
- $R_{e\varepsilon} > 70$: parete fluidodinamicamente scabra.

È utile ricordare che, attraverso la (396) e la definizione di u_* , questo numero di Reynolds può essere espresso in funzione della pendenza piezometrica:

$$R_{e\varepsilon} = \frac{\varepsilon_e}{\nu} \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = \frac{\varepsilon_e}{\nu} \sqrt{g i D}. \quad (410)$$

La quale mette in evidenza come la transizione tra la condizione di parete fluidodinamicamente liscia e quella di parete fluidodinamicamente scabra può aversi sia incrementando la scabrezza equivalente delle pareti, ma anche aumentando la pendenza piezometrica e quindi la portata che fluisce attraverso il condotto.

Nel caso di parete fluidodinamicamente scabra, tra i parametri che controllano il sistema dobbiamo aggiungere la scabrezza equivalente, questo fa sì che si possano costruire due gruppi adimensionali. L'equazione dello strato limite, adimensionalizzata diventa:

$$\frac{1}{R_{e\varepsilon}} \frac{\partial \bar{u}_1^*}{\partial \eta_e} - \overline{u_1' u_2'^*} = 1 - 2\varepsilon_r \eta_e \quad (411)$$

con $\eta_e = x_2 / \varepsilon_e$ ed avendo introdotto la *scabrezza relativa* $\varepsilon_r = \varepsilon_e / D$.

Il profilo di velocità deve avere la forma:

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = F(\eta_e, R_{e\varepsilon}). \quad (412)$$

In questo caso la dipendenza da $R_{e\varepsilon}$ rimane perché questo gruppo adimensionale, al contrario di R_{e^*} , non può essere supposto molto maggiore di 1; mancando questa ipotesi, il termine che contiene $R_{e\varepsilon}^{-1}$ non è più trascurabile rispetto agli altri ed il parametro rimane nella formulazione del profilo. Imponendo il raccordo delle pendenze nello strato di equilibrio otteniamo questa volta:

$$\frac{\bar{u}_1}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{x_2}{\varepsilon_e} \right) + c(R_{e\varepsilon}). \quad (413)$$

Osservando l'equazione dello strato limite adimensionalizzata per parete scabra, si può concludere che, anche in questo caso, l'andamento degli sforzi totali è lineare; inoltre, se $R_{e\varepsilon} \gg 1$, gli sforzi viscosi sono trascurabili rispetto a quelli turbolenti e l'equazione non dipende più dal numero di Reynolds, $R_{e\varepsilon}$, ciò implica che, in queste condizioni, il fenomeno diventa indipendente da questo parametro ed anche nel profilo di velocità questa dipendenza dovrà sparire: $c(R_{e\varepsilon}) = \text{cost.}$

INDICE

1. RICHIAMI DI ANALISI TENSORIALE	5
1.1. INTRODUZIONE	5
1.2. OPERAZIONI TRA TENSORI	5
1.2.1. SOMMA	6
1.2.2. MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE	6
1.2.3. PRODOTTO	6
1.2.4. PRODOTTO SCALARE	6
1.2.5. PRODOTTO ESTERNO	7
1.3. OPERATORI DI KRONECKER E DI RICCI	7
1.4. SISTEMI DI RIFERIMENTO ORTONORMALI	7
1.5. CAMBIAMENTO DI SISTEMA DI RIFERIMENTO	8
1.6. PROPRIETÀ DI SIMMETRIA DI UN TENSORE	9
1.7. PRODOTTO VETTORIALE	10
1.8. AUTOVALORI ED AUTOVETTORI	10
1.9. CAMPI TENSORIALI	11
1.10. TEOREMI DI GREEN E STOKES	13
1.11. COORDINATE CURVILINEE	13
1.11.1. COORDINATE CILINDRICHE	15
1.11.2. COORDINATE SFERICHE	16
2. CINEMATICA DEI FLUIDI	18
2.1. DEFINIZIONE DI FLUIDO	18
2.2. MEZZO CONTINUO	19
2.3. TENSORE GRADIENTE DI VELOCITÀ	20
2.3.1. ROTAZIONE RIGIDA	21
2.3.2. VELOCITÀ DI DEFORMAZIONE	22
2.4. DESCRIZIONE LAGRANGIANA ED EULERIANA DI UN CAMPO	25
2.4.1. DESCRIZIONE EULERIANA	25
2.4.2. DESCRIZIONE LAGRANGIANA	25
2.5. CLASSIFICAZIONE DEI MOTI	28
3. EQUAZIONI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI	29
3.1. I PRINCIPI DELLA MECCANICA DEI FLUIDI	29
3.2. TEOREMA DI REYNOLDS	30
3.3. CONSERVAZIONE DELLA MASSA	32
3.3.1. FORMA GLOBALE	32
3.3.2. FORMA LOCALE	32
3.4. BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO	33
3.4.1. FORMA GLOBALE	33
3.4.2. VERSO LA FORMA LOCALE	35
3.5. TENSORE DELLE TENSIONI	35

3.6. EQUAZIONE DI CAUCHY	37
3.7. BILANCIO DEL MOMENTO DELLA QUANTITÀ DI MOTO	37
3.7.1. APPROCCIO TENSORIALE	37
3.7.2. APPROCCIO PSEUDO-VETTORIALE	39
3.8. EQUAZIONI COSTITUTIVE	40
3.8.1. FLUIDI STOKESIANI	41
3.8.2. EQUAZIONE DI STATO	41
3.8.3. FLUIDI NEWTONIANI	42
3.9. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES	44
3.9.1. EQUAZIONI DI NAVIER-STOKES IN FORMA ADIMENSIONALE	44
3.9.2. FLUSSI PARALLELI	46
3.10. EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA	48
4. BILANCIO DELL'ENERGIA TOTALE	51
<hr/>	
4.1. PRIMO PRINCIPIO DELLA TERMODINAMICA	51
4.1.1. FORMA LOCALE	52
4.2. EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA TERMICA	53
4.3. RELAZIONE DI FOURIER	54
4.4. TEOREMA DI BERNOULLI	54
4.5. BILANCIO DI ENTROPIA	55
5. FLUSSI POTENZIALI	57
<hr/>	
5.1. EQUAZIONE DELLA VORTICITÀ	57
5.2. FORMULAZIONE DEL PROBLEMA	59
5.2.1. MOTI IRROTAZIONALI	59
5.2.2. POTENZIALE	60
5.2.3. FLUIDI INCOMPRESSIBILI	60
5.2.4. CONDIZIONI AL CONTORNO	61
5.2.5. EQUAZIONE DELL'ENERGIA MECCANICA	61
5.3. CAMPI TRIDIMENSIONALI	62
5.3.1. FLUSSO UNIFORME	62
5.3.2. SORGENTE O POZZO PUNTIFORME	62
5.3.3. SEMICORPO	64
5.3.4. CORPO CHIUSO	65
5.3.5. PROBLEMA INVERSO	66
5.3.6. PARADOSSO DI D'ALAMBERT	67
5.4. CAMPI BIDIMENSIONALI	70
5.4.1. FUNZIONE DI CORRENTE	70
5.4.2. SORGENTE LINEARE	72
5.4.3. VORTICE	74
5.4.4. DOPPIETTA	76
5.4.5. CILINDRO INVESTITO DA UN FLUSSO UNIFORME	78
5.4.6. CILINDRO CON CIRCOLAZIONE	80
5.4.7. AZIONI DINAMICHE SUL CILINDRO	81
6. STRATO LIMITE	83
<hr/>	
6.1. EQUAZIONE DI PRANDTL	83
6.2. STATO DI TENSIONE	86
6.3. SPESSORE DELLO STRATO LIMITE	87
6.3.1. SPESSORE DI SPOSTAMENTO	87
6.3.2. SPESSORE DI QUANTITÀ DI MOTO	88
6.4. EQUAZIONE DI VON KÁRMÁN	89
6.5. RESISTENZA DI UNA LASTRA PIANA	93
6.5.1. SOLUZIONE DI BLASIUS	94

6.6. SEPARAZIONE DELLO STRATO LIMITE	97
7. TURBOLENZA	100
7.1. DEFINIZIONE	100
7.2. DESCRIZIONE STATISTICA DELLA TURBOLENZA	103
7.2.1. MEDIA DI INSIEME E MEDIA TEMPORALE	104
7.2.2. DENSITÀ DI PROBABILITÀ	104
7.2.3. MOMENTI DI ORDINE SUPERIORE	105
7.2.4. CORRELAZIONI	106
7.2.5. SPETTRI DI POTENZA	107
7.3. LE SCALE DELLA TURBOLENZA	108
7.3.1. SCALE INTEGRALI	109
7.3.2. SCALA DI TAYLOR	109
7.4. IPOTESI DI TAYLOR	110
7.5. EQUAZIONI PER LE QUANTITÀ MEDIE	111
7.5.1. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA	111
7.5.2. EQUAZIONE DI REYNOLDS	111
7.6. IPOTESI DI BOUSSINESQUE	113
7.7. EQUAZIONI GLOBALI PER I FLUSSI TURBOLENTI	114
7.7.1. CONSERVAZIONE DELLA MASSA	114
7.7.2. BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO	114
8. STRATO LIMITE TURBOLENTO	116
8.1. SCABREZZA EQUIVALENTE	116
8.2. TRANSIZIONE DELLO STRATO LIMITE	117
8.3. EQUAZIONI PER LO STRATO LIMITE TURBOLENTO	118
8.3.1. ANDAMENTO DELLA PIEZOMETRICA	118
8.3.2. STATO DI TENSIONE	120
8.4. SOTTOSTRATO LAMINARE	123
8.5. NUCLEO	123
8.6. STRATO DI EQUILIBRIO	124
8.7. PARETI FLUIDODINAMICAMENTE SCABRE	125
INDICE	127